

UNIWERSYTET KARDYNAŁA STEFANA
WYSZYŃSKIEGO
W WARSZAWIE

WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY
SZKOŁA NAUK ŚCISŁYCH

ROZPRAWA DOKTORSKA

**Charakteryzacja zjawiska Stokesa dla
rozwiązań formalnych wybranych równań
różniczkowych i moment różniczkowych
cząstkowych**

**Bożena Tkacz (nazwisko panieńskie: Podhajecka)
Numer albumu: 3470**

Promotor
dr hab. Sławomir Michalik, prof. UKSW

Warszawa 2022

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP	3
2. POJĘCIA WPROWADZAJĄCE	6
2.1. Analiza zespolona	6
2.2. Sektory i szeregi formalne	13
2.3. Funkcje jądrowe i funkcje momentów	14
2.4. Asymptotyka w sensie Gevrey'a	16
2.5. Procedura moment k -sumowalności w kierunku d	18
2.6. Zmodyfikowana procedura k -sumowalności w kierunku d	20
3. ZJAWISKO STOKESA	24
3.1. Podstawowe definicje	24
4. ZJAWISKO STOKESA W TERMINACH RESIDUÓW	26
4.1. Równanie przewodnictwa cieplnego	26
4.2. Uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego	34
5. ZJAWISKO STOKESA W TERMINACH HIPERFUNKCJI	38
5.1. Dystrybucje i hiperfunkcje	38
5.2. Skoki przez linie Stokesa w terminach hiperfunkcji	44
5.3. Równanie przewodnictwa cieplnego	45
5.4. Uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego	53
5.5. Równania moment różniczkowe ze stałymi współczynnikami	54
5.6. Równania różniczkowe ze zmiennymi współczynnikami	64
6. ZJAWISKO STOKESA W TERMINACH FUNKCJI RESURGENTNYCH	74
6.1. Równanie przewodnictwa cieplnego	90
6.2. Uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego	93
7. UWAGI KOŃCOWE	98
Literatura	100

1. WSTĘP

W XIX wieku wybitny brytyjski fizyk i matematyk George Gabriel Stokes badał w [24] rozwiązanie $w_0(z)$ równania Airy'ego

$$w'' - zw = 0.$$

Zauważył on, że owo rozwiązanie ma różne rozwinięcia asymptotyczne, przy $|z| \rightarrow \infty$, a mianowicie:

$$w_0(z) \sim C \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}}{z^{1/4}}, \quad \text{gdy } |\arg z| \leq \pi - \epsilon < \pi,$$

oraz

$$w_0(z) \sim C e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\cos(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4})}{z^{1/4}}, \quad \text{gdy } |\arg z - \pi| \leq \epsilon < \pi,$$

gdzie C jest różną od zera stałą.

Odtąd własność, że funkcja ma różną postać asymptotyczną w różnych regionach płaszczyzny zespolonej nazwano, na cześć odkrywcy, zjawiskiem Stokesa. Warto podkreślić, że to zjawisko jest ściśle związane z teorią sumowalności, która w ostatnich latach była intensywnie używana przy badaniu asymptotycznych zachowań rozwiązań zespolonych równań różniczkowych cząstkowych, których dane początkowe były holomorficzne w zespolonym otoczeniu zera. Procedury sumowalności zastosowane do (multi)sumowalnych rozwiązań formalnych pozwalają na wyznaczenie ich (multi)sum w pewnych kierunkach. Zaś te (multi)sumy są dokładnymi rozwiązaniami danego równania. Ponadto te dokładne rozwiązania są holomorficzne w pewnych sektorowych otoczeniach zera. Relację między tymi dokładnymi rozwiązaniami można badać właśnie w kontekście zjawiska Stokesa tzn. znajduje się tzw. linie Stokesa, które oddzielają różne dokładne rozwiązania otrzymane z tego samego (multi)sumowalnego rozwiązania formalnego zadanego szeregiem potęgowym. Następnie wylicza się tzw. skoki przez linie Stokesa, czyli różnice między dokładnymi rozwiązaniami na liniach Stokesa.

W niniejszej pracy zbadamy zjawisko Stokesa dla rozwiązań jednorodnych liniowych równań różniczkowych cząstkowych oraz ich uogólnień na równania moment-różniczkowe. W rozważanych równaniach kierunki osobliwe będą wynikały z braku holomorficzności danych początkowych. Będziemy wyznaczać linie Stokesa oraz postać skoków przez te linie. Nasze badania przeprowadzimy na trzy różne sposoby: poprzez residua, hiperfunkcje oraz funkcje resurgentne. Warto podkreślić, że tego typu podejście, (tzn. poprzez trzy różne metody) nie było jeszcze dotychczas studiowane.

Poniższa praca składa się z siedmiu rozdziałów. W rozdziale drugim rozpoczniemy od przypomnienia najpotrzebniejszych pojęć, twierdzeń i lematów z analizy zespolonej. Potem przejdziemy do sektorów oraz szeregów formalnych. W dalszej części rozdziału drugiego przytoczymy definicje funkcji jądrowych oraz funkcji momentów. Kolejno omówimy asymptotykę w sensie Gevrey'a. Na koniec tego rozdziału opiszemy procedurę moment k -sumowalności w kierunku d oraz jej szczególny przypadek.

W rozdziale trzecim pokrótce przedstawimy zjawisko Stokesa dla sumowalnych szeregów formalnych – zdefiniujemy linie Stokesa, linie anty-Stokesa oraz skoki przez linie Stokesa.

W rozdziale czwartym, używając residuów, rozważymy zjawisko Stokesa dla równania przewodnictwa cieplnego, którego dane początkowe $\varphi(z)$ są meromorficzne i mają biegun w punkcie $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Następnie rozszerzymy otrzymane wyniki do przypadku, gdy dane początkowe to funkcja meromorficzna ze skończoną liczbą biegunów. Kolejno, udowodnione rezultaty przeniesiemy na uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego. Warto zaznaczyć, że przedstawione w tym rozdziale wyniki zostały opublikowane w [19].

Rozdział piąty rozpoczniemy od przypomnienia podstawowych informacji dotyczących teorii dystrybucji oraz teorii hiperfunkcji. Potem zdefiniujemy skoki przez linie Stokesa w terminach hiperfunkcji. W podrozdziale 5.3 powrócimy do równania przewodnictwa cieplnego i używając hiperfunkcji wyznaczymy linie Stokesa oraz skoki przez te linie w sytuacji, gdy $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest tym razem nie biegunem, lecz jednowartościowym punktem osobliwym bądź punktem rozgałęzienia danych początkowych $\varphi(z)$. Podamy także kilka przykładów wynikających z udowodnionych przez nas twierdzeń. Należy zwrócić uwagę, że wyniki przedstawione w tym podrozdziale zostały opublikowane w [26]. W podrozdziale 5.4 znów powrócimy do uogólnienia równania przewodnictwa cieplnego, by opisać zjawisko Stokesa za pomocą hiperfunkcji. W następnym podrozdziale zajmiemy się szczególnymi przypadkami równań moment różniczkowych (dwóch zmiennych zespolonych) ze stałymi współczynnikami, których dane początkowe są holomorficzne z wyjątkiem skończonej liczby punktów osobliwych lub punktów rozgałęzienia. Wyniki z tego podrozdziału zostały przedstawione w publikacji [20]. W ostatniej części rozdziału piątego rozważymy równanie różniczkowe cząstkowe ze zmiennymi współczynnikami ze względu na zmienną t – wyznaczymy postać całkową multisumy rozwiązania formalnego, linie Stokesa oraz skoki. Rezultaty opisane w ostatnim podrozdziale zostały opublikowane w [27].

Rozdział szósty będzie poświęcony przedstawieniu (różnego od poprzednich) podejścia do zjawiska Stokesa, a mianowicie będziemy operować na

funkcjach resurgentnych. Najpierw przytoczymy podstawowe definicje, twierdzenia i fakty dotyczące wspomnianych funkcji resurgentnych. Następnie, po raz ostatni, powrócimy do równania przewodnictwa cieplnego i jego uogólnienia, by wyznaczyć linie Stokesa oraz zapisać postaci skoków. Podamy również kilka przykładów, gdy dane początkowe mają m.in. biegun lub nieskończony zbiór punktów osobliwych. Ostatni rozdział będzie dotyczył uwag końcowych i problemów otwartych, które wynikają z głównych rezultatów zaprezentowanych w Rozdziałach 4, 5 i 6.

2. POJĘCIA WPROWADZAJĄCE

W tym rozdziale przytoczymy podstawowe definicje, twierdzenia i lematy, które będą niezbędne w tej pracy.

2.1. Analiza zespolona. Rozpocznijmy od kilku ważnych definicji i twierdzeń (bez dowodów) z analizy zespolonej. W tym podrozdziale opieramy się na [12].

Definicja 1. Niech $a_n \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$. Szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{część regularna}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}}_{\text{część osobliwa}}$$

nazywamy *szeregiem Laurenta o środku w punkcie z_0* .

Twierdzenie 1 ([12, Rozdział IX, str.79-80]). *Niech funkcja $f(z)$ będzie holomorphyzna wewnątrz pierścienia kołowego $P = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, przy czym*

$$R = \frac{1}{\liminf \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad r = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Wtedy $f(z)$ daje się przedstawić w postaci szeregu Laurenta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

a współczynniki mają postać

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds,$$

gdzie K jest dowolnym dodatnio zorientowanym (tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) okręgiem o środku w punkcie z_0 , zawartym w pierścieniu P .

Definicja 2. Niech funkcja $f(z)$ będzie holomorphyzna w sąsiedztwie $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r, \text{ gdzie } r \in \mathbb{R}_+\}$ punktu z_0 . *Residuum funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 nazywamy liczbę*

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1},$$

gdzie a_{-1} jest współczynnikiem z części osobliwej rozwinięcia $f(z)$ w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu z_0 .

Z powyższego twierdzenia wynika, że

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(s) ds,$$

przy czym K jest dowolnym dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie z_0 i promieniu ρ ($0 < \rho < r$), zawartym w U .

Definicja 3. Jeżeli funkcja f nie jest holomorficzną w punkcie $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ale jest holomorficzną w pewnym jego sąsiedztwie $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, gdy $z_0 \neq \infty$ lub $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, gdy $z_0 = \infty$, to z_0 nazywamy *punktem osobliwym izolowanym funkcji f* .

Definicja 4. Punkt osobliwy izolowany z_0 funkcji $f(z)$ nazywamy

- (1) *pozornie osobliwym*, jeżeli granica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ istnieje i jest skończona,
- (2) *biegunem funkcji $f(z)$* , jeżeli $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,
- (3) *k -krotnym biegunem funkcji $f(z)$* , jeżeli $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0$ oraz $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{N}$,
- (4) *istotnie osobliwym*, jeżeli nie istnieje granica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Przykład 1.

- Niech $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2}$. Zauważmy, że $\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2} = -\frac{1}{2\pi}$, zatem punkt $z = \pi$ jest pozornie osobliwy. W podobny sposób otrzymamy, że punkt $z = -\pi$ również będzie pozornie osobliwy.
- Niech $f(z) = \frac{z}{\sin z}$. Wówczas $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$, a więc punkt $z = 0$ jest pozornie osobliwy. Jednakże $\lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z}{\sin z} = \pm\infty$, dla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, czyli punkty $z = k\pi$ są biegunami jednokrotnymi.
- Niech $f(z) = \frac{1}{z(\cos z - 1)}$. Wtedy $\lim_{z \rightarrow 0} z^3 \frac{1}{z(\cos z - 1)} = -2$, a także $\lim_{z \rightarrow 0} z^4 \frac{1}{z(\cos z - 1)} = 0$, stąd punkt $z = 0$ jest biegunem trzykrotnym. Natomiast $\lim_{z \rightarrow 2k\pi} (z - 2k\pi)^2 \frac{1}{z(\cos z - 1)} = -\frac{1}{k\pi}$ oraz $\lim_{z \rightarrow 2k\pi} (z - 2k\pi)^3 \frac{1}{z(\cos z - 1)} = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, czyli punkty $z = 2k\pi$ są biegunami dwukrotnymi.
- Niech $f(z) = e^{1/z^2}$. W tym przypadku granica $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z^2}$ nie istnieje, zatem punkt $z = 0$ jest istotnie osobliwy.

Uwaga 1. Zauważmy, że

- jeżeli z_0 jest punktem pozornie osobliwym, to część osobliwa rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu z_0 redukuje się do zera, tzn. $a_{-n} = 0$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$,
- jeżeli z_0 jest k -krotnym biegunem funkcji $f(z)$, to część osobliwa rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu z_0 składa się ze skończonej liczby wyrazów postaci

$$\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}, \quad \text{gdzie } a_{-k} \neq 0,$$

- jeżeli z_0 jest punktem istotnie osobliwym, to część osobliwa rozwinięcia funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu z_0 zawiera nieskończenie wiele wyrazów.

Stwierdzenie 1. Niech $f(z)$ będzie holomorphyzna w sąsiedztwie punktu z_0 . Wówczas

(1) Jeśli funkcja $f(z)$ ma w punkcie z_0 biegun jednokrotny, to

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

(2) Jeśli funkcja $f(z)$ ma w punkcie z_0 biegun k -krotny, to

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)].$$

Twierdzenie 2 (Twierdzenie całkowite o residuach, [12, Rozdział IX, str. 86-87]). Niech funkcja $f(z)$ będzie holomorphyzna w obszarze jednospójnym G z wyłączeniem skończonej liczby punktów z_1, z_2, \dots, z_n , natomiast C będzie zamkniętą krzywą bez samoprzecięć zorientowaną dodatnio, leżącą w obszarze G i zawierającą wewnątrz punkty z_1, z_2, \dots, z_n . Wówczas

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Zajmijmy się teraz przedłużeniami analitycznymi funkcji - bezpośrednimi, pośrednimi czy wzdłuż krzywej, a także z definicjami z nimi związanymi.

Definicja 5. Niech będą dane dwie funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ analityczne odpowiednio w obszarach D_1 i D_2 , takich, że $D := D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Jeżeli $f_1(z) = f_2(z)$ na D , to mówimy, że każda z funkcji f_1 i f_2 jest przedłużeniem analitycznym bezpośrednim lub krótko przedłużeniem drugiej.

Przykład 2. Szereg geometryczny $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-z)^n$ jest zbieżny w $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$, szereg geometryczny $f_2(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} (1+iz)^n$ jest zbieżny w $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$. Zauważmy, że $f_1(z) = f_2(z)$ na $D_1 \cap D_2$, ponieważ suma każdego z tych szeregów wynosi $1/z$. Zatem funkcje f_1 i f_2 są swoimi przedłużeniami.

Przykład 3. Rozważmy szereg geometryczny $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, który jest zbieżny w $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, oraz funkcję $f_2(z) = \frac{1}{z^2+1}$, która jest analityczna w $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Zauważmy, że $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{z^2+1}$ dla $|z| < 1$. Skoro wewnątrz koła $|z| = 1$ mamy, że $f_1(z) = f_2(z)$, to funkcja f_2 jest analitycznym przedłużeniem funkcji f_1 na całą płaszczyznę zespoloną z wyjątkiem $z = \pm i$.

Pojęcie przedłużenia analitycznego daje się w naturalny sposób uogólnić, a mianowicie

Definicja 6. Niech będzie dany skończony ciąg funkcji $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ analitycznych odpowiednio w obszarach D_1, D_2, \dots, D_n oraz niech każda następna funkcja będzie przedłużeniem bezpośrednim poprzedniej. Powiemy

wtedy, że funkcja $f_n(z)$ jest *przedłużeniem pośrednim* funkcji $f_1(z)$. Obszary D_1 i D_n mogą być rozłączne lub nie.

Możliwe są następujące przypadki

- (1) W części wspólnej każdych dwóch obszarów D_i, D_k , gdzie $i \neq k$, funkcje f_i, f_k są identyczne. Wówczas funkcje $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ określają w obszarze $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ jedną funkcję analityczną $f(z)$, która w obszarze D_k jest identyczna z funkcją $f_k(z)$.
- (2) W części wspólnej dwóch obszarów, np. D_1, D_n , mamy, że $f_1 \neq f_n$. Wówczas funkcje $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ nie określają w obszarze $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ funkcji w dotychczasowym znaczeniu. Mówimy wtedy, że funkcje $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ są *gałęziami jednej funkcji analitycznej wieloznacznej*, która w obszarze D_k jest identyczna z funkcją f_k .

Funkcja wieloznaczna różni się od funkcji dotychczas rozpatrywanych, bo w pewnych punktach ma więcej niż jedną wartość. Funkcje w dotychczasowym znaczeniu, a więc mające w każdym punkcie swego obszaru istnienia jedną wartość, nazywamy funkcjami *jednoznacznymi* lub krótko *funkcjami*.

Przykład 4. Rozważmy funkcję wieloznaczną $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, gdzie $r = |z|$ oraz $\theta \in \{\arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Wówczas funkcja $f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, gdzie $0 < \theta < \pi$, jest gałęzią funkcji f . Przedłużeniem analitycznym funkcji f_1 wzdłuż ujemnej osi rzeczywistej do dolnej półpłaszczyzny jest funkcja $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, gdzie $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$. Natomiast analitycznym przedłużeniem funkcji f_2 wzdłuż dodatniej osi rzeczywistej do pierwszej ćwiartki jest funkcja $f_3(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, gdzie $\pi < \theta < \frac{5\pi}{2}$. Zauważmy, że w pierwszej ćwiartce mamy, że $f_3(z) \neq f_1(z)$, a dokładniej $f_3(z) = -f_1(z)$.

Definicja 7. Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w otwartym zbiorze $U \subset \mathbb{C}$. Punkt brzegowy w w zbiorze U nazywamy *punktem przedłużalności funkcji f* , jeżeli istnieją: otwarte otoczenie V punktu w , funkcja g holomorficzna na V oraz otwarty podzbiór U' zbioru U takie, że $w \in \partial U'$ i $f|_{U' \cap V} = g|_{U' \cap V}$. Jeśli punkt w nie jest punktem przedłużalności, to nazywamy go *punktem osobliwym funkcji f* .

Definicja 8. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze D . Niech szereg $P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$, gdzie $a \in D$, będzie szeregiem Taylora danej funkcji. Ponadto niech ze środka szeregu $P(z)$ wychodzi dowolna krzywa C o równaniu $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, mająca początek $z(\alpha) = a$ i koniec $z(\beta) = b$. Szereg $P(z)$ jest *przedłużalny wzdłuż krzywej C* , jeżeli każdy punkt krzywej $z(t)$ jest środkiem pewnego szeregu potęgowego $P_t(z)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, o dodatnim promieniu zbieżności, gdzie

$$(1) P_\alpha(z) \equiv P(z),$$

- (2) każde dwa szeregi $P_t(z)$ i $P_{t'}(z)$, dla których różnica $|t' - t|$ jest dostatecznie mała, są identyczne w części wspólnej swych kół zbieżności.

Rodzinę szeregów $\{P_t(z)\}_{\alpha \leq t \leq \beta}$, nazywamy *łańcuchem szeregów potęgowych* o początku $P_\alpha(z)$ i końcu $P_\beta(z)$. Szereg $P_\alpha(z)$ nazywamy *przedłużeniem szeregu $P_\beta(z)$ wzdłuż krzywej C* .

Stwierdzenie 2. [12, Rozdział X, str.103] *Każdy szereg potęgowy ma wzdłuż krzywej wychodzącej z jego środka co najwyżej jedno przedłużenie.*

Definicja 9. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w obszarze D , a $P(z)$ -szeregiem Taylora tej funkcji w otoczeniu pewnego punktu $a \in D$. Każdy taki szereg nazywamy *elementem* funkcji $f(z)$.

Jeżeli C jest dowolną krzywą wychodzącą z punktu a i zawartą w obszarze D , to wszystkie elementy danej funkcji o środkach na C tworzą łańcuch szeregów potęgowych. Element $P(z)$ daje się więc przedłużać analitycznie wzdłuż każdej krzywej zawartej w obszarze D i każde jego przedłużenie jest nowym elementem danej funkcji.

Definicja 10. Funkcję analityczną w pewnym obszarze D nazywamy *dowolnie przedłużalną* w tym obszarze, jeżeli każdy jej element daje się przedłużać analitycznie wzdłuż dowolnej krzywej zawartej w obszarze D .

Stwierdzenie 3 ([12, Rozdział X, str.107]). *Jeżeli funkcja f jest dowolnie przedłużalna w obszarze D , to każdy punkt $a \in D$ jest środkiem tej samej liczby elementów funkcji f .*

Definicja 11. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną dowolnie przedłużalną w otoczeniu pierścieniowym

$$(1) \quad 0 < |z - z_0| < R$$

punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ (w przypadku, gdy $z_0 = \infty$, należy wziąć otoczenie $R < |z| < \infty$). Jeżeli każdy element funkcji f po przedłużeniu wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej zawartej w (1) wraca do elementu wyjściowego, to funkcja jest jednoznaczna, a punkt z_0 jest albo biegunem albo punktem pozornie lub istotnie osobliwym. Jeśli natomiast pewien element nie wraca po przedłużeniu do elementu wyjściowego, to funkcja jest wieloznaczna i każdy punkt obszaru (1) jest środkiem tej samej liczby $r > 1$ elementów funkcji f . W tym przypadku z_0 nazywamy *punktem rozgałęzienia* funkcji f , a liczbę $r - 1$ rzędem rozgałęzienia w punkcie z_0 . Rząd rozgałęzienia jest nieskończony, gdy $r = \infty$.

Przykład 5. Funkcje $f(z) = \sqrt[n]{z}$ i $g(z) = \log z$ są dowolnie przedłużalne w obszarze $0 < |z| < \infty$ i mają po dwa punkty rozgałęzienia: 0 oraz ∞ . Rząd rozgałęzienia funkcji $f(z) = \sqrt[n]{z}$ w punkcie 0 i w punkcie ∞ wynosi $n - 1$, natomiast rząd rozgałęzienia funkcji $g(z) = \log z$ w punkcie 0 i w punkcie ∞ jest nieskończony.

Przykład 6. Dla funkcji $f(z) = \sqrt{e^{z^2} + 1}$ punkty $z_k = \pm\sqrt{\pi i + 2k\pi i}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, są punktami rozgałęzienia rzędu drugiego.

Stwierdzenie 4 ([12, Rozdział XIV, str.153]). *Niech $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho, \rho > 0\}$ będzie dowolnie ustalonym okręgiem zawartym w otoczeniu (1) i niech $r \cdot K$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ i $r > 1$, oznacza krzywą zamkniętą, jaką opisze punkt obiegając r -krotnie okrąg K w tym samym kierunku. Jeżeli pewien element $P(z)$ funkcji analitycznej $f(z)$ dowolnie przedłużalnej w otoczeniu (1) jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż krzywej $r \cdot K$, lecz nie jest identyczny ze swym przedłużeniem wzdłuż krzywej $m \cdot K$, gdzie $m < r$, to funkcję $f(z)$ w otoczeniu (1) można zapisać w postaci szeregu*

$$(2) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\sqrt[r]{z - z_0})^n.$$

Definicja 12. Niech funkcja $f(z)$ będzie analityczna i dowolnie przedłużalna w (1) oraz niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie punktem rozgałęzienia funkcji $f(z)$. Punkt z_0 nazywamy *algebraicznym punktem rozgałęzienia*, jeżeli rząd rozgałęzienia jest skończony i jeżeli w rozwinięciu (2) wszystkie lub prawie wszystkie współczynniki a_n dla $n < 0$ są równe zero. W punkcie takim istnieje granica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ skończona lub nieskończona.

Punkty rozgałęzienia, które nie są algebraiczne nazywamy *logarytmicznymi punktami rozgałęzienia*.

Uwaga 2. Jeżeli funkcja analityczna $f(z)$ spełnia założenia Stwierdzenia 4 w obszarze $R < |z| < \infty$, to daje się w nim przedstawić przez szereg postaci

$$(3) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{\sqrt[r]{z}} \right)^n.$$

Ponadto, punkt $z_0 = \infty$ nazywamy *algebraicznym punktem rozgałęzienia rzędu $r - 1$* , jeżeli w rozwinięciu (3) wszystkie lub prawie wszystkie współczynniki a_n dla $n > 0$ są równe zero.

Przykład 7. Funkcja $f(z) = \sqrt{\ln z}$ ma trzy punkty rozgałęzienia: 0, 1 oraz ∞ . Punkty 0 i ∞ są logarytmicznymi punktami rozgałęzienia, natomiast punkt 1 dla tego elementu funkcji $f(z)$, dla którego $\ln 1 = 0$ jest algebraicznym punktem rozgałęzienia.

Przypomnijmy jeszcze definicję kielka funkcji holomorficznej.

Definicja 13. Dla ustalonego punktu $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ oznaczmy przez \mathbb{O}_a zbiór wszystkich funkcji określonych na otoczeniu punktu a , które są holomorficzne w punkcie a . Powiemy, że funkcje $f, g \in \mathbb{O}_a$ są w relacji, jeśli $f = g$ na pewnym otoczeniu punktu a . Wówczas piszemy $f \stackrel{a}{\sim} g$. Zauważmy, że relacja ta jest relacją równoważności. Klasę równoważności relacji $\stackrel{a}{\sim}$ nazywamy *kielkiem funkcji holomorficznej w punkcie a* .

Definicja 14. Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym oraz niech funkcje f, g będą holomorficzne na pewnych otoczeniach zbioru K . Powiemy, że funkcje te są w relacji, jeżeli $f = g$ na pewnym otoczeniu zbioru K . Wówczas piszemy $f \sim g$. Kielkiem funkcji holomorficznej na zbiorze zwartym K nazywamy klasę równoważności relacji \sim .

Na koniec tego podrozdziału omówimy powierzchnię Riemanna logarytmu $\tilde{\mathbb{C}}$, czyli nakrycie uniwersalne przestrzeni $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definicja 15. Rozważmy zbiór \mathcal{P} wszystkich krzywych postaci $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takich, że $\gamma(0) = 1$. Na zbiorze \mathcal{P} określamy relację homotopijnej równoważności \sim następująco

$$\gamma \sim \gamma_0 : \begin{cases} \exists H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ciągle i takie, że} \\ H(0, t) = \gamma_0(t) \text{ oraz } H(1, t) = \gamma(t), \text{ dla każdego } t \in [0, 1], \\ H(s, 0) = \gamma_0(0) \text{ oraz } H(s, 1) = \gamma_0(1), \text{ dla każdego } s \in [0, 1], \end{cases}$$

oraz definiujemy *nakrycie uniwersalne* $\tilde{\mathbb{C}}$ przestrzeni $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, jako zbiór wszystkich klas równoważności,

$$\tilde{\mathbb{C}} := \mathcal{P} / \sim .$$

Uwaga 3. Zauważmy, że jeżeli $\gamma \sim \gamma_0$, to $\gamma(1) = \gamma_0(1)$, koniec $\gamma(1)$ nie zależy od γ , lecz od klasy równoważności $[\gamma]$. Zatem otrzymamy odwzorowanie

$$(4) \quad \pi : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \pi(\zeta) = \gamma(1), \quad \text{dla każdego } \gamma \in \mathcal{P}, \quad \text{takiego, że } [\gamma] = \zeta.$$

Zauważmy również, że wśród wszystkich reprezentantów klasy równoważności dla $\zeta \in \tilde{\mathbb{C}}$ istnieje reprezentant kanoniczny: istnieje jednoznaczna para $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ taka, że ζ jest reprezentowane przez konkatencję¹ krzywych $t \in [0, 1] \mapsto e^{it\theta}$ oraz $t \in [0, 1] \mapsto (1 + t(r - 1))e^{i\theta}$. W tym przypadku, piszemy

$$\zeta = r\underline{e}^{i\theta}, \quad r = |\zeta|, \quad \theta = \arg \zeta,$$

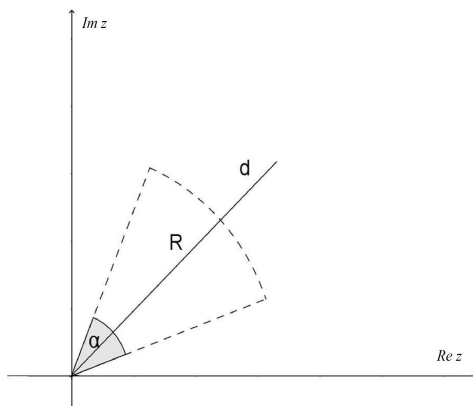
a więc $\pi(r\underline{e}^{i\theta}) = re^{i\theta}$.

¹Niech będą dane dwie krzywe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $\gamma' : [a', b'] \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $\gamma(b) = \gamma'(a')$. *Konkatencją* tych krzywych nazywamy krzywą $\gamma \square \gamma' : [a, b + b' - a'] \rightarrow \mathbb{C}$, zdefiniowaną jako $\gamma \square \gamma' := \gamma(t)$ dla $t \in [a, b]$ oraz $\gamma \square \gamma' := \gamma'(a' + t - b)$ dla $t \in [b, b + b' - a']$.

2.2. Sektory i szeregi formalne. Rozpocznijmy od definicji sektora i dysku.

Definicja 16. *Sektorem* S w kierunku $d \in \mathbb{R}$, rozwartości $\alpha > 0$ i promieniu $R \in \mathbb{R}_+$ w nakryciu uniwersalnym $\tilde{\mathbb{C}}$ przestrzeni $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazywamy zbiór postaci

$$S = S_d(\alpha, R) = \{z \in \tilde{\mathbb{C}} : z = re^{i\phi} : r \in (0, R), \phi \in (d - \alpha/2, d + \alpha/2)\}.$$



Rys.1 Sektor S w kierunku d , rozwartości α i promieniu R , na płaszczyźnie zespolonej.

Jeżeli $R = +\infty$, to sektor S nazywamy *nieograniczonym* i oznaczamy przez $S = S_d(\alpha)$. W przypadku, gdy rozwartość α nie jest istotna, sektor $S = S_d(\alpha)$ zapisujemy jako S_d .

Definicja 17. Sektor S^* nazywamy *właściwym podsektorem* sektora $S = S(d, \alpha, R)$, jeśli $\overline{S^*} \setminus \{0\} \subseteq S$. Przyjmujemy wówczas oznaczenie $S^* \prec S$.

Definicja 18. *Dyskiem zespolonym* D_r w przestrzeni \mathbb{C} o promieniu $r > 0$ i środku w 0 nazywamy zbiór postaci

$$D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

Jeżeli promień r nie jest istotny, to zbiór D_r określamy symbolem D .

Dodatkowo definiujemy $D_r^* := D_r \setminus \{0\}$.

Ponadto przez *dysk sektorowy* będziemy rozumieć zbiór postaci $S_d(\alpha) \cup D$ (odpowiednio $S_d \cup D$), który oznaczymy krótko $\hat{S}_d(\alpha)$ (odpowiednio \hat{S}_d).

Notacja: Jeżeli funkcja f jest holomorficzna na obszarze $G \subset \mathbb{C}^n$, wówczas będziemy to zapisywać jako $f \in \mathcal{O}(G)$.

Analogicznie, przestrzeń wszystkich funkcji holomorficznyc, zmiennej $z^{1/\gamma} = (z_1^{1/\gamma_1}, \dots, z_n^{1/\gamma_n})$, na dziedzinie $G \subset \mathbb{C}^n$ będziemy zapisywać jako $\mathcal{O}_{1/\gamma}(G)$, gdzie $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ oraz $1/\gamma = (1/\gamma_1, \dots, 1/\gamma_n)$.

W ogólności, jeśli przez \mathbb{E} oznaczymy zespoloną przestrzeń Banacha z normą $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$, to przez $\mathcal{O}(G, \mathbb{E})$ (odpowiednio $\mathcal{O}_{1/\gamma}(G, \mathbb{E})$) będziemy rozumieć zbiór wszystkich funkcji holomorficznycych o wartościach z przestrzeni \mathbb{E} (odpowiednio zbiór wszystkich funkcji holomorficznycych zmiennej $z^{1/\gamma}$) na obszarze $G \subseteq \mathbb{C}^n$. W tej pracy jako przestrzeń Banacha \mathbb{E} będziemy przyjmować albo przestrzeń liczb zespolonych \mathbb{C} (wówczas zapis $\mathcal{O}(G, \mathbb{C})$ uprościmy do $\mathcal{O}(G)$ i podobnie zapis $\mathcal{O}_{1/\gamma}(G, \mathbb{C})$ do $\mathcal{O}_{1/\gamma}(G)$) albo przestrzeń funkcji $E_{1/\gamma}(D) := \mathcal{O}_{1/\gamma}(D) \cap C(\bar{D})$ z normą $\|\varphi\|_{E_{1/\gamma}(D)} := \max_{z \in \bar{D}} |\varphi(z)|$.

Definicja 19. Niech $k \in \mathbb{R}$, S będzie sektorem nieograniczonym oraz $u \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(S, \mathbb{E})$. Mówimy, że funkcja u ma *wzrost eksponencjalny rzędu co najwyżej k* , jeśli dla każdego podsektora właściwego $S^* \prec S$ istnieją stałe dodatnie C_1, C_2 takie, że $\|u(x)\|_{\mathbb{E}} \leq C_1 e^{C_2 |x|^k}$ dla każdego $x \in S^*$. Zbiór wszystkich takich funkcji oznaczamy przez $\mathcal{O}_{1/\gamma}^k(S, \mathbb{E})$, natomiast w przypadku, gdy $S = \mathbb{C}$, to przez $\mathcal{O}_{1/\gamma}^k(\mathbb{C}, \mathbb{E})$.

Powyższą definicję możemy zapisać ogólniej tzn. jeśli G jest nieograniczonym obszarem w \mathbb{C}^n oraz $u \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(G, \mathbb{E})$, to $u \in \mathcal{O}_{1/\gamma}^k(G, \mathbb{E})$, gdy dla każdego zbioru G^* spełniającego warunek $\bar{G}^* \subset \text{Int } G$ istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ takie, że $\|u(x)\|_{\mathbb{E}} \leq C_1 e^{C_2 |x|^k}$ dla każdego $x \in G^*$.

Przejdźmy teraz do zdefiniowania szeregów formalnych.

Definicja 20. Rozważmy ciąg liczb zespolonych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Szereg potęgowy postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ utworzony dla tego ciągu nazywamy *szeregiem formalnym*. Zbiór wszystkich takich szeregów oznaczamy przez $\mathbb{C}[[t]]$.

Uwaga 4. W tej pracy będziemy także rozpatrywać szeregi formalne postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) t^n$, gdzie $a_n(z) \in \mathcal{O}(D_r)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$, albo szeregi formalne postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, gdzie $a_n \in \mathbb{E}$. Wówczas oznaczenie $\mathbb{C}[[t]]$ zastąpimy odpowiednio przez $\mathcal{O}(D_r)[[t]]$ i przez $\mathbb{E}[[t]]$.

2.3. Funkcje jądrowe i funkcje momentów. W tym podrozdziale przypomnimy pojęcia funkcji jądrowych i powiązanych z nimi funkcji momentów.

Definicja 21 ([3, Rozdział 5.5]). Parę funkcji e_m oraz E_m nazywamy *funkcjami jądrowymi rzędu k* ($k > 1/2$), jeśli mają one następujące własności:

1. $e_m \in \mathcal{O}(S_0(\pi/k))$, $e_m(z)/z$ jest całkowalna w zerze, $e_m(x) \in \mathbb{R}_+$ dla $x \in \mathbb{R}_+$ oraz e_m jest eksponencjalnie płaska rzędu k przy $z \rightarrow \infty$ w $S_0(\pi/k)$ (tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $A, B > 0$ takie, że $|e_m(z)| \leq A e^{-(|z|/B)^k}$ dla $z \in S_0(\pi/k - \varepsilon)$).
2. Funkcja $E_m \in \mathcal{O}^k(\mathbb{C})$ oraz $E_m(1/z)/z$ jest całkowalna w zerze w sektorze $S_{\pi}(2\pi - \pi/k)$.
3. Związek między funkcjami e_m oraz E_m jest zadany przez *korespondującą funkcję momentów m rzędu $1/k$* . A mianowicie, funkcja m

jest zdefiniowana jako transformacja Mellina funkcji e_m

$$(5) \quad m(u) := \int_0^\infty x^{u-1} e_m(x) dx \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} u \geq 0$$

oraz funkcja jądrowa E_m ma następujące rozwinięcie w szereg potęgowy

$$(6) \quad E_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(n)} \quad \text{dla} \quad z \in \mathbb{C}.$$

4. Dodatkowo zakładamy, że korespondująca funkcja momentów m spełnia warunek $m(0) = 1$.

Uwaga 5. Zauważmy, że z odwrotnej transformacji Mellina i z (6) wynika, że funkcja momentów m jednoznacznie wyznacza funkcje jądrowe e_m oraz E_m .

Zwróćmy uwagę, że dla $k \leq 1/2$ zbiór $S_\pi(2\pi - \pi/k)$ nie jest zdefiniowany, a więc druga własność z Definicji 21 nie będzie spełniona. Zatem musimy zdefiniować funkcje jądrowe rzędu $k \leq 1/2$ oraz korespondującą funkcję momentów w inny sposób.

Definicja 22 ([3, Rozdział 5.6]). Funkcję e_m nazywamy *funkcją jądrową rzędu* $k > 0$, jeśli można znaleźć parę funkcji jądrowych $e_{\tilde{m}}$ i $E_{\tilde{m}}$ rzędu $pk > 1/2$ (dla pewnego $p \in \mathbb{N}$) takich, że

$$e_m(z) = e_{\tilde{m}}(z^{1/p})/p \quad \text{dla} \quad z \in S_0(\pi/k).$$

Dla danej funkcji jądrowej e_m rzędu $k > 0$ definiujemy *korespondującą funkcję momentów* m rzędu $1/k > 0$ poprzez (5) oraz *funkcję jądrową* E_m rzędu $k > 0$ poprzez (6).

Tak jak w [18], rozszerzymy wyżej przytoczone pojęcie funkcji momentów do takiej, która ma rząd rzeczywisty.

Definicja 23. Mówimy, że m jest *funkcją momentów rzędu* $1/k < 0$, jeśli $1/m$ jest funkcją momentów rzędu $-1/k > 0$.

Powiemy również, że m jest *funkcją momentów rzędu* 0, jeśli istnieją funkcje momentów m_1 i m_2 tego samego rzędu postaci $1/k > 0$ takie, że $m = m_1/m_2$.

Na podstawie Definicji 23 oraz [3, Twierdzenia 31 i 32] otrzymamy:

Stwierdzenie 5. Niech m_1, m_2 będą funkcjami momentów o rzędach równych odpowiednio $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas

- $m_1 m_2$ jest funkcją momentów rzędu $s_1 + s_2$,
- m_1/m_2 jest funkcją momentów rzędu $s_1 - s_2$.

Przykład 8. Dla dowolnego $k > 0$ klasyczne funkcje jądrowe i korespondująca z nimi funkcja momentów, które spełniają Definicje 21 lub 22, dane są wzorami:

- $e_m(z) = kz^k e^{-z^k}$,
- $m(u) = \Gamma(1 + u/k)$, gdzie Γ to funkcja gamma Eulera określona wzorem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{dla } \operatorname{Re} x > 0,$$

- $E_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(1+j/k)} =: \mathbf{E}_{1/k}(z)$, gdzie $\mathbf{E}_{1/k}$ jest funkcją Mittag-Lefflera o indeksie $1/k$.

Powyższe funkcje najczęściej używa się w klasycznej teorii k -sumowalności.

Przykład 9. Dla każdego $s \in \mathbb{R}$ zdefiniujemy funkcję Γ_s następująco

$$\Gamma_s(u) := \begin{cases} \Gamma(1 + su) & \text{dla } s \geq 0 \\ 1/\Gamma(1 - su) & \text{dla } s < 0, \end{cases}$$

przy czym $\operatorname{Re} u \geq 0$.

Zauważmy, że z Przykładu 8 i Definicji 23 wynika, że funkcja Γ_s jest przykładem funkcji momentów rzędu $s \in \mathbb{R}$.

Funkcja momentów Γ_s będzie szeroko stosowana w tej pracy, ze względu na to, że każda funkcja momentów m rzędu s ma taki sam wzrost jak funkcja Γ_s . Dokładniej mówiąc, mamy, że

Stwierdzenie 6 ([3, Rozdział 5.5]). *Jeśli m jest funkcją momentów rzędu $s \in \mathbb{R}$, wówczas istnieją stałe $a, A, c, C > 0$ takie, że*

$$ac^n \Gamma_s(n) \leq m(n) \leq AC^n \Gamma_s(n) \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}_0.$$

2.4. Asymptotyka w sensie Gevrey'a. W tym podrozdziale podamy najważniejsze pojęcia dotyczące rozwinięć asymptotycznych.

Definicja 24. Niech $s \in \mathbb{R}$. Szereg formalny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ nazywamy *szeregiem formalnym Gevrey'a rzędu s* jeśli istnieją stałe $A, B > 0$ takie, że $|a_n| \leq AB^n (n!)^s$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

Zbiór wszystkich takich szeregów oznaczamy przez $\mathbb{C}[[t]]_s$.

Uwaga 6. (zobacz [5]) Jeśli $s < 0$, to $u \in \mathbb{C}[[t]]_s \iff u$ jest zbieżny oraz $u \in \mathcal{O}^{-\frac{1}{s}}(\mathbb{C})$.

Definicja 25. Niech $s \in \mathbb{R}$ oraz $u \in \mathcal{O}(S)$, gdzie S jest pewnym sektorem w nakryciu uniwersalnym $\tilde{\mathbb{C}}$. Szereg formalny Gevrey'a rzędu s

$\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]_s$ nazywamy *rozwinięciem asymptotycznym Gevrey'a rzędu s* funkcji u w S jeśli dla każdego podsektora właściwego $S^* \prec S$ istnieją stałe $A, B > 0$ takie, że dla każdego $N \in \mathbb{N}_0$ i $t \in S^*$ zachodzi

$$|f(t) - \sum_{n=0}^N a_n t^n| \leq AB^N (N!)^s |t|^{N+1}.$$

Używamy wówczas zapisu: $f(t) \sim_s \hat{f}(t)$ w S .

Przypomnijmy teraz dwa ważne twierdzenia (bez dowodów) dotyczące asymptotyki w sensie Gevrey'a.

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Ritta, [3, Stwierdzenie 10]). *Niech $\hat{x}(t) \in \mathbb{C}[[t]]_s$, gdzie $s > 0$. Niech S będzie sektorem o rozwartości α takiej, że $0 < \alpha \leq s\pi$. Wtedy istnieje funkcja $x(t) \in \mathcal{O}(S)$ taka, że $x(t) \sim_s \hat{x}(t)$ w sektorze S .*

Twierdzenie 4 (Lemat Watsona, [3, Stwierdzenie 11]). *Niech S będzie sektorem o rozwartości α takiej, że $\alpha > s\pi$, gdzie $s > 0$. Jeśli $x(t) \in \mathcal{O}(S)$ spełnia warunek, że $x(t) \sim_s 0$ w S , to $x(t) \equiv 0$ w sektorze S .*

Zauważmy więc, że twierdzenie Ritta w sektorach o małej rozwartości zapewnia nam istnienie funkcji dla danego rozwinięcia, natomiast lemat Watsona pokazuje, że w sektorach o dużej rozwartości rozwinięcie jednoznacznie wyznacza funkcję.

Używając teraz teorii Balsera dotyczącej ogólnej moment sumowalności ([3, Rozdział 6.5],[3, Twierdzenie 38]), zastosujemy funkcje momentów do zdefiniowania moment transformacji Borela i uogólnienia definicji rzędu Gevrey'a.

Definicja 26. Niech m będzie funkcją momentów. Wówczas liniowy operator $\hat{\mathcal{B}}_m: \mathbb{E}[[t]] \rightarrow \mathbb{E}[[t]]$ zdefiniowany jako

$$\hat{\mathcal{B}}_m\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j t^j\right) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{m(j)} t^j$$

nazywamy *m -moment transformacją Borela*.

Uogólnimy teraz Definicję 24.

Definicja 27. Niech $s \in \mathbb{R}$. Wówczas $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ nazywamy *szeregiem formalnym Gevrey'a rzędu s* , jeśli istnieje dysk $D \subset \mathbb{C}$ o środku w zerze taki, że $\hat{\mathcal{B}}_{\Gamma_s} \hat{u} \in \mathcal{O}(D, \mathbb{E})$. Przestrzeń wszystkich takich szeregów formalnych oznaczamy przez $\mathbb{E}[[t]]_s$.

Uwaga 7. Zauważmy, że korzystając ze Stwierdzenia 6 możemy zamienić funkcję Γ_s w Definicji 27 na dowolną funkcję momentów m rzędu s .

Uwaga 8. Jeśli $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_s$ oraz $s \leq 0$, to szereg formalny \hat{u} jest zbieżny, a więc jego suma u jest dobrze zdefiniowana.

Ponadto, $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_0 \iff u \in \mathcal{O}(D, \mathbb{E})$ oraz $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_s \iff u \in \mathcal{O}^{-1/s}(\mathbb{C}, \mathbb{E})$ dla $s < 0$.

2.5. Procedura moment k -sumowalności w kierunku d . W tym podrozdziale przedstawimy metodę moment sumowalności, która pozwoli uzbieżnić szereg formalny $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$.

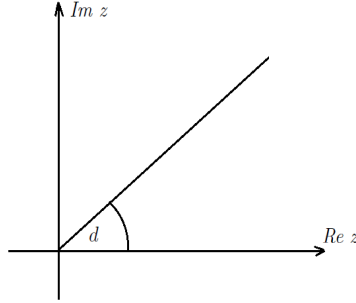
Rozpocznijmy od zdefiniowania następujących operatorów:

Definicja 28. Niech e_m, E_m będą parą funkcji jądrowych rzędu $k > 0$ z korespondującą funkcją momentów m i niech $d \in \mathbb{R}$.

- Jeśli $v \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E})$, to operator całkowy $T_{m,d}$ zdefiniowany przez

$$(T_{m,d}v)(t) := \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t)v(s) \frac{ds}{s}$$

dla t spełniających warunki: $|d - \arg t| < \frac{\pi}{2k}$, $\cos(k|d - \arg t|) > c|t|^k$ dla odpowiednio dużego $c \geq 0$, natomiast całkowanie przebiega wzdłuż półprostej $e^{id}\mathbb{R}_+ := \{re^{id} : r \geq 0\}$ przedstawionej na poniższym rysunku



nazywamy m -moment transformacją Laplace'a w kierunku d .

- Jeśli $v \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi}{k} + \varepsilon, R), \mathbb{E})$ dla pewnych $\varepsilon, R > 0$, to operator całkowy $T_{m,d}^-$ postaci

$$(T_{m,d}^-v)(s) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(d)} E_m(s/t)v(t) \frac{dt}{t} \quad \text{dla } s \in S_d(\varepsilon),$$

nazywamy *odwrotną m -moment transformacją Laplace'a w kierunku d* , przy czym krzywa $\gamma(d)$ zorientowana ujemnie jest brzegiem sektora w kierunku d o skończonym promieniu i rozwarości nieco większej od π/k , zawartego w $S_d(\frac{\pi}{k} + \varepsilon, R)$ (patrz rysunek poniżej).

Uwaga 11. Dopuszczalność kierunku \mathbf{d} względem \mathbf{k} jest równoważna inkluzjom $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$, gdzie $I_j := (d_j - \frac{\pi}{2k_j}, d_j + \frac{\pi}{2k_j})$ dla $j = 1, \dots, n$.

Definicja 32. Niech m_1, \dots, m_n będą funkcjami momentów o dodatnich rzędach równych odpowiednio $1/\kappa_1, \dots, 1/\kappa_n$, gdzie $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ są takie jak w Definicji 31. Szereg formalny $\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j t^j \in \mathbb{E}[[t]]$ nazywamy \mathbf{k} -multisumowalnym w dopuszczalnym multikierunku \mathbf{d} , pod warunkiem, że

- $v_n(t) := (\hat{\mathcal{B}}_{m_n} \cdots \hat{\mathcal{B}}_{m_1} \hat{u})(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{m_1(j) \cdots m_n(j)} t^j \in \mathcal{O}^{\kappa_n}(\hat{S}_{d_n}, \mathbb{E})$,
- $v_{j-1}(t) := (T_{m_j, d_j} v_j)(t) \in \mathcal{O}^{\kappa_{j-1}}(S_{d_{j-1}}, \mathbb{E})$ dla $j = n, n-1, \dots, 2$.

Ponadto, \mathbf{k} -multisuma szeregu formalnego \hat{u} w multikierunku \mathbf{d} jest dana wzorem

$$u^{\mathbf{d}}(t) = \mathcal{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{d}} \hat{u}(t) := (T_{m_1, d_1} \cdots T_{m_n, d_n} v_n)(t).$$

Definicja 33. Jeśli (d_1, \dots, d_n) jest dopuszczalnym multikierunkiem oraz wszystkie funkcje v_1, \dots, v_n istnieją z wyjątkiem $v_j \notin \mathcal{O}^{\kappa_j}(S_{d_j}, \mathbb{E})$, to d_j nazywamy *osobliwym kierunkiem dla \hat{u} na poziomie k_j* (dla $j = 1, \dots, n$).

Definicja 34. Jeśli \hat{u} ma co najwyżej skończenie wiele (modulo 2π) kierunków osobliwych na każdym poziomie k_j , $1 \leq j \leq n$, to wówczas \hat{u} nazywamy \mathbf{k} -multisumowalnym.

Uwaga 12. Jeśli $k_1 > \dots > k_n > 0$, (d_1, \dots, d_n) jest dopuszczalnym multikierunkiem oraz \hat{u}_j jest k_j -sumowalny w kierunku d_j dla $j = 1, \dots, n$, to, korzystając z [3, Lemat 20], $\hat{u} := \hat{u}_1 + \dots + \hat{u}_n$ jest \mathbf{k} -multisumowalny w multikierunku \mathbf{d} oraz $\mathcal{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{d}} \hat{u}(t) = \mathcal{S}_{k_1, d_1} \hat{u}_1(t) + \dots + \mathcal{S}_{k_n, d_n} \hat{u}_n(t)$.

Ponadto, jeżeli dodatkowo \hat{u}_j jest k_j -sumowalne z n_j kierunkami osobliwymi $d_{j,1}, \dots, d_{j,n_j}$ (dla $j = 1, \dots, n$), to \hat{u} jest \mathbf{k} -multisumowalny oraz $d_{j,1}, \dots, d_{j,n_j}$ są kierunkami osobliwymi dla \hat{u} na poziomie k_j .

Uwaga 13. Zauważmy, że biorąc w wyżej opisanej procedurze moment k -sumowalności w kierunku d funkcje jądrowe z przykładu 8 otrzymujemy klasyczną teorię k -sumowalności (zobacz [2, Rozdział 3], [3, Rozdziały 6.1-6.4], [13, Rozdział 5]).

2.6. Zmodyfikowana procedura k -sumowalności w kierunku d . W tym podrozdziale skupimy się na przedstawieniu metody, którą najczęściej wykorzystuje się przy badaniu rozwiązań formalnych równań różniczkowych cząstkowych ze stałymi współczynnikami. Polega ona na zamianie szeregu formalnego $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{E}[[t]]$ na funkcję holomorficzną w pewnym sektorowym otoczeniu zera. Ponadto, metoda ta jest szczególnym przypadkiem procedury moment k -sumowalności w kierunku d przedstawionej

w poprzednim podrozdziale, a mianowicie bierzemy funkcję momentów postaci

$$(8) \quad m(n) = \frac{\Gamma(1 + n(1 + \frac{1}{k}))}{\Gamma(1 + n)},$$

a także korespondujące z nią funkcje jądrowe

$$(9) \quad e_m(z) = \frac{k}{1+k} z^{\frac{k}{1+k}} C_{\frac{1+k}{k}} \left(z^{\frac{k}{1+k}} \right)$$

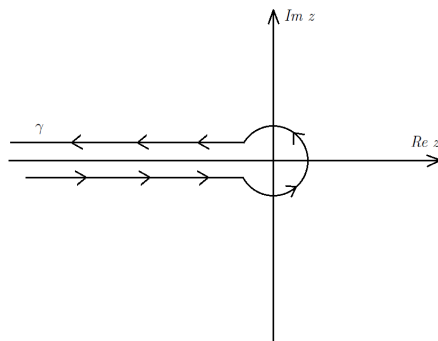
oraz

$$E_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(n)},$$

gdzie funkcja C_α (zobacz [3, Rozdział 11]) jest zdefiniowana jako

$$C_\alpha(\tau) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma u^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{u-\tau u^{1/\alpha}} du, \quad \text{dla } \alpha > 1 \text{ oraz } \tau \in \mathbb{C},$$

gdzie γ to krzywa idąca z ∞ wzdłuż $\arg u = -\pi$ do pewnego $u_0 < 0$, następnie wzdłuż okręgu $|u| = |u_0|$ do $\arg u = \pi$ i kolejno powracająca do ∞ wzdłuż tego promienia (patrz Rys.4).



Rys.4 Krzywa γ na płaszczyźnie zespolonej.

Całkując wyraz po wyrazie oraz używając formuły Hankela² otrzymujemy następujące rozwinięcie w szereg potęgowy

$$C_\alpha(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n! \Gamma\left(1 - \frac{n+1}{\alpha}\right)}, \quad \text{dla } \alpha > 1 \text{ oraz } \tau \in \mathbb{C}.$$

W szczególności dla $\alpha = 2$ dostajemy (zobacz [16], Rozdział 4)

$$C_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{4}}.$$

²Formuła Hankela to: $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma w^{-z} e^w dw$, gdzie γ jest krzywą całkowania taką jak na Rys.4.

Stąd dla $k = 1$ otrzymamy $m(u) = \frac{\Gamma(1+2u)}{\Gamma(1+u)}$ oraz

$$(10) \quad e_m(z) = \frac{1}{2}\sqrt{z}C_2(\sqrt{z}) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{z}e^{-\frac{z}{4}}.$$

Ustalmy $k > 0$, $d \in \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon > 0$. Aby uzbieźnić szereg formalny $\hat{x}(t)$ najpierw użyjemy zmodyfikowanej transformacji Borela rzędu k zdefiniowanej następująco

$$(\check{B}_k \hat{x})(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n n!}{\Gamma\left(1 + n\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)}.$$

Następnie, jeżeli powyższy szereg potęgowy jest zbieżny, to możemy zastosować operator Ecalle'a $E_{k,d}$ rzędu k w kierunku d , tzn.

$$(11) \quad (E_{k,d}g)(t) := t^{-\frac{k}{1+k}} \int_{e^{i\theta}\mathbb{R}_+} g(s) C_{\frac{1+k}{k}}\left(\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{k}{1+k}}\right) ds^{\frac{k}{1+k}},$$

gdzie $t \in S_d\left(\frac{\pi}{k} + \bar{\varepsilon}, \bar{R}\right)$, dla pewnych $\bar{\varepsilon}, \bar{R} > 0$ oraz $g(s) = (\check{B}_k \hat{x})(s)$, dla $s \in S_d(\varepsilon)$, natomiast całkowanie przebiega wzdłuż dowolnej półprostej postaci $e^{i\theta}\mathbb{R}_+ := \{re^{i\theta} : r \geq 0\}$, gdzie $\theta \in (d - \varepsilon/2, d + \varepsilon/2)$.

Warto zwrócić uwagę, że operator Ecalle'a to nic innego jak m -moment transformacja Laplace'a $T_{m,d}$ przy m postaci (8).

Sprawdźmy teraz kiedy całka w definicji operatora Ecalle'a (11) jest zbieżna. W tym celu przypomnijmy przydatny lemat dotyczący funkcji C_α :

Lemat 1 ([1, Lemat 5.1]). *Niech $\alpha > 1$ oraz $\beta \neq 0$ będą takie, że $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $A_1, A_2 > 0$ takie, że zachodzi $|C_\alpha(\tau)| \leq A_1 e^{-A_2|\tau|^\beta}$ dla każdego τ takiego, że $|\arg\tau| \leq \frac{\pi}{2\beta} - \varepsilon$.*

Uwaga 14. Jeśli $\alpha = (k+1)/k$, to $\beta = k+1$. Zatem z Lematu 1 wynika, że dla każdego $\bar{\varepsilon} > 0$ istnieją stałe $A_1, A_2 > 0$ takie, że

$$\left|C_{\frac{1+k}{k}}\left(\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{k}{1+k}}\right)\right| \leq A_1 e^{-A_2|s/t|^k}$$

dla każdego s/t spełniającego warunek $|\arg(s/t)| \leq \frac{\pi}{2k} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$.

Zatem na podstawie powyższej uwagi otrzymujemy, że całka w (11) jest zbieżna, jeśli funkcja $g(s)$ ma wzrost eksponencjalny rzędu co najwyżej k .

Podsumowując, możemy użyć zmodyfikowanej metody k -sumowalności w kierunku d , jeżeli operator $E_{k,d}g$ jest dobrze zdefiniowany, to znaczy, jeżeli spełnione są następujące warunki

- (A) $\hat{x}(t) \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k}$,
- (B) $(\check{B}_k \hat{x})(t) \in \mathcal{O}^k(S_d, \mathbb{E})$.

Zatem w przypadku, gdy warunki (A) i (B) są spełnione, możemy powiedzieć, że $\hat{x}(t)$ jest k -sumowalny w kierunku d . Ponadto, k -suma szeregu formalnego $\hat{x}(t)$ w kierunku d ma postać

$$x^d(t) = \mathcal{S}_{k,d}\hat{x}(t) := (E_{k,d}\check{B}_k\hat{x})(t),$$

gdzie $t \in S_d\left(\frac{\pi}{k} + \bar{\varepsilon}, \bar{R}\right)$, dla pewnych $\bar{\varepsilon}, \bar{R} > 0$.

Uwaga 15. Na podstawie Uwagi 14 dla każdego $\tilde{\varepsilon} > 0$ istnieją stałe $A_1, A_2 > 0$ takie, że $|C_{(k+1)/k}((s/t)^{\frac{k}{1+k}})| \leq A_1 e^{-A_2|\frac{s}{t}|^k}$ dla każdego s/t spełniającego warunek $|\arg(s/t)| \leq \frac{\pi}{2k} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$.

Jeśli $\arg s = \theta$, wówczas $\arg t \in (\theta - \frac{\pi}{2k} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \theta + \frac{\pi}{2k} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2})$.

Jeśli zaś $g(s) = (\check{B}_k\hat{x})(t) \in \mathcal{O}^k(S_d, \mathbb{E})$, tzn. istnieją stałe $B_1, B_2 > 0$ takie, że $|g(s)| \leq B_1 e^{B_2|s|^k}$, wtedy

$$\left| \int_{e^{i\theta}\mathbb{R}_+} g(s) C_{(k+1)/k}((s/t)^{\frac{k}{1+k}}) ds^{\frac{k}{1+k}} \right| \leq \int_0^\infty B_1 e^{B_2|s|^k} \cdot A_1 e^{-A_2|\frac{s}{t}|^k} ds^{\frac{k}{1+k}}.$$

Powyższa całka jest zbieżna, o ile $A_2|t|^{-k} > B_2$, a więc gdy $|t| < (\frac{A_2}{B_2})^{1/k}$. Zatem $(E_{k,d}g)(t)$ jest dobrze zdefiniowaną funkcją holomorficzną dla $t \in S_\theta(\frac{\pi}{k} - \tilde{\varepsilon}, r)$, gdzie $r = (\frac{A_2}{B_2})^{1/k}$. Skoro $\theta \in (d - \varepsilon/2, d + \varepsilon/2)$, to

$$x^d(t) = \mathcal{S}_{k,d}\hat{x}(t) := (E_{k,d}\check{B}_k\hat{x})(t) \sim_{1/k} \hat{x}(t) \quad \text{w} \quad S_d\left(\frac{\pi}{k} + \varepsilon - \tilde{\varepsilon}, r\right).$$

Stąd dla każdego $\hat{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że $x^d(t) \in \mathcal{O}(S_d(\pi/k + \hat{\varepsilon}, r))$.

Uwaga 16. Z lematu Watsona (Twierdzenie 4), k -suma $x^d(t)$ jest jednoznacznie wyznaczoną funkcją holomorficzną na sektorze $S_d(\pi/k + \hat{\varepsilon}, r)$ spełniającą warunek

$$x^d(t) \sim_{1/k} \hat{x}(t) \quad \text{w} \quad S_d(\pi/k + \hat{\varepsilon}, r).$$

3. ZJAWISKO STOKESA

W teorii równań różniczkowych cząstkowych niestety w większości przypadków pojawia się znaczący problem, a mianowicie określenie dokładnego rozwiązania równania różniczkowego często nie jest możliwe. Dlatego też duże znaczenie odgrywają rozwinięcia asymptotyczne rozwiązań, które pozwalają na zbadanie własności i interpretację otrzymanych wyników. W XIX wieku badaniem asymptotyki zajmował się m.in. wybitny matematyk George Stokes – analizując funkcję Airy’ego doszedł on do wniosku, że funkcja analityczna może mieć różne rozwinięcia asymptotyczne w różnych sektorach płaszczyzny zespolonej. Ten znaczący fakt nazwano na cześć odkrywcy *zjawiskiem Stokesa*. Należy podkreślić, że z zagadnieniem asymptotyki ściśle związana jest teoria sumowalności. W tej pracy będziemy używać jej, aby z rozwiązań formalnych równań różniczkowych cząstkowych, na poszczególnych sektorach płaszczyzny zespolonej otrzymać funkcje holomorfe, których różnice będziemy badać.

3.1. Podstawowe definicje. Rozpocznijmy od przedstawienia pojęcia zjawiska Stokesa dla k -sumowalnych szeregów formalnych $\hat{x} = \hat{x}(t) \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k}$ (odpowiednio dla $\hat{u} = \hat{u}(t, z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]_{1/k}$).

Definicja 35. Załóżmy, że $\hat{x} \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k}$ (odpowiednio $\hat{u} \in \mathcal{O}(D)[[t]]_{1/k}$) jest k -sumowalny we wszystkich kierunkach $d \in (\phi - \varepsilon, \phi + \varepsilon)$, z wyjątkiem kierunku osobliwego $d = \phi$ (dla pewnego $\varepsilon > 0$). Zbiór postaci

$\mathcal{L}_\phi = \{t \in \tilde{\mathbb{C}} : \arg t = \phi\}$ nazywamy *linią Stokesa dla \hat{x}* (odpowiednio \hat{u}).

Ponadto, jeśli ϕ^+ (odpowiednio ϕ^-) oznacza kierunek bliski kierunkowi ϕ i większy (odpowiednio mniejszy) od ϕ , oraz $x^{\phi^+}(t) = \mathcal{S}_{k, \phi^+} \hat{x}(t)$ dla $t \in S_{\phi^+}(\frac{\pi}{k} + \bar{\varepsilon}, \bar{R})$, dla pewnych $\bar{\varepsilon}, \bar{R} > 0$ (odpowiednio $x^{\phi^-}(t) = \mathcal{S}_{k, \phi^-} \hat{x}(t)$ dla $t \in S_{\phi^-}(\frac{\pi}{k} - \bar{\varepsilon}, \bar{R})$), wówczas różnicę $J_{\mathcal{L}_\phi} \hat{x}(t) := x^{\phi^+}(t) - x^{\phi^-}(t)$ dla $t \in S_\phi(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, \bar{R})$ nazywamy *skokiem dla \hat{x} przez linię Stokesa \mathcal{L}_ϕ* . Analogicznie definiujemy *skok dla \hat{u} przez linię Stokesa \mathcal{L}_ϕ* .

Definicja 36. Każda linia Stokesa \mathcal{L}_ϕ dla \hat{x} (odpowiednio \hat{u}) określa również tak zwaną *linię anty-Stokesa $\mathcal{L}_{\phi \pm \frac{\pi}{2k}}$* dla \hat{x} (odpowiednio \hat{u}).

Uwaga 17. Załóżmy, że S jest sektorem o rozwartości π/k w kierunku ϕ . Niech $f(t), g(t) \in \mathcal{O}(S)$ będą k -sumami szeregu $\hat{x}(t)$ w kierunkach odpowiednio ϕ^- i ϕ^+ , tzn. $f(t) \sim_{1/k} \hat{x}(t)$ oraz $g(t) \sim_{1/k} \hat{x}(t)$ na S . Przyjmijmy oznaczenie $r(t) := |f(t) - g(t)|$ dla każdego $t \in S$. Wówczas $r(t)$ jest najmniejsza na linii Stokesa \mathcal{L}_ϕ dla t bliskich zeru oraz spełnia nierówności: $|f(t)| \leq r(t)$ lub $|g(t)| \leq r(t)$ na linii anty-Stokesa $\mathcal{L}_{\phi \pm \frac{\pi}{2k}}$.

Rozszerzmy teraz powyżej opisane zjawisko Stokesa na multisumowalne szeregi formalne $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$.

Definicja 37. Załóżmy, że $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ jest \mathbf{k} -multisumowalny z kierunkami osobliwymi $d_{j,1}, \dots, d_{j,n_j}$ na poziomie k_j , $1 \leq j \leq n$. Wówczas dla każdego $l = 1, \dots, n_j$ oraz $j = 1, \dots, n$ zbiór postaci $\mathcal{L}_{d_{j,l}} = \{t \in \tilde{\mathbb{C}} : \arg t = d_{j,l}\}$ nazywamy *linią Stokesa na poziomie k_j* dla \hat{u} .

Założmy teraz, że dla ustalonego $j \in \{1, \dots, n\}$ wektor $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ jest dopuszczalnym multikierunkiem z kierunkiem osobliwym d_j na poziomie k_j oraz z nieosobliwymi kierunkami d_l na poziomie k_l dla $l \neq j$, niech $\mathbf{d}_j^\pm := (d_1, \dots, d_j^\pm, \dots, d_n)$ będą dopuszczalnymi multikierunkami, gdzie d_j^+ (odpowiednio d_j^-) oznacza kierunek bliski do d_j i większy (odpowiednio mniejszy) od d_j , oraz niech $u^{\mathbf{d}_j^+}(t) := \mathcal{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{d}_j^+} \hat{u}(t)$, gdzie $t \in S_{d_j^+}(\frac{\pi}{k_j} + \bar{\varepsilon}, \bar{R})$, dla pewnych $\bar{\varepsilon}, \bar{R} > 0$. (odpowiednio $u^{\mathbf{d}_j^-}(t) := \mathcal{S}_{\mathbf{k}, \mathbf{d}_j^-} \hat{u}(t)$ dla $t \in S_{d_j^-}(\frac{\pi}{k_j} - \bar{\varepsilon}, \bar{R})$), wówczas różnicę $J_{\mathcal{L}_{d_j, k_j}} \hat{u}(t) := u^{\mathbf{d}_j^+}(t) - u^{\mathbf{d}_j^-}(t)$ dla $t \in S_{d_j}(\frac{\pi}{k_j} - \varepsilon, \bar{R})$ nazywamy *skokiem dla \hat{u} przez linie Stokesa \mathcal{L}_{d_j} na poziomie k_j* .

Definicja 38. Każda linia Stokesa \mathcal{L}_{d_j} na poziomie k_j dla \hat{u} wyznacza tak zwaną *linię anty-Stokesa $\mathcal{L}_{d_j \pm \frac{\pi}{2k_j}}$ na poziomie k_j* dla \hat{u} .

4. ZJAWISKO STOKESA W TERMINACH RESIDUÓW

4.1. **Równanie przewodnictwa cieplnego.** Rozważmy następujące równanie

$$(12) \quad \begin{cases} \partial_t u = \partial_z^2 u \\ u(0, z) = \varphi(z). \end{cases}$$

Łatwo widać, że dla $\varphi \in \mathcal{O}(D)$ powyższe zagadnienie Cauchy'ego ma jednoznaczne rozwiązanie formalne (które ogólnie jest rozbieżne) postaci

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(z) t^n}{n!}.$$

Przytoczmy przydatne twierdzenie dotyczące rozwiązań sumowalnych równania przewodnictwa cieplnego i ich postaci całkowych

Twierdzenie 5 ([14, Twierdzenie 3.1] i [16, Twierdzenie 4.2]). *Załóżmy, że \hat{u} jest rozwiązaniem formalnym zagadnienia Cauchy'ego równania przewodnictwa cieplnego (12), gdzie*

$$(13) \quad \varphi \in \mathcal{O}^2\left(D \cup S_{\frac{d}{2}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup S_{\frac{d}{2}+\pi}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \quad \text{dla pewnego } \varepsilon > 0.$$

Wówczas \hat{u} jest 1-sumowalny w kierunku d oraz dla każdego $\theta \in (d - \frac{\varepsilon}{2}, d + \frac{\varepsilon}{2})$ i dla każdego $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że jego 1-suma $u^\theta \in \mathcal{O}(S_\theta(\pi - \tilde{\varepsilon}, r) \times D)$ ma postać

$$(14) \quad u(t, z) = u^\theta(t, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}_+} (\varphi(z+s) + \varphi(z-s)) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds$$

dla $t \in S_\theta(\pi - \tilde{\varepsilon}, r)$ oraz $z \in D$.

Ponadto, dla każdego $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że $u \in \mathcal{O}(S_d(\pi + \bar{\varepsilon}, r) \times D)$.

Opiszemy teraz zjawisko Stokesa w przypadku, gdy funkcja φ ma biegun w punkcie $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że funkcja φ w równaniu (12) jest postaci*

$$(15) \quad \varphi(z) = \frac{a}{z - z_0} + \tilde{\varphi}(z), \quad \text{dla pewnych } a, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{oraz } \tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C}).$$

Niech $\eta := 2 \arg z_0$, $u_1 := u^\theta$ dla $\theta \in (\eta, \eta + 2\pi) \bmod 4\pi$ oraz $u_2 := u^\theta$ dla $\theta \in (\eta + 2\pi, \eta + 4\pi) \bmod 4\pi$, gdzie u^θ jest rozwiązaniem równania (12) w postaci (14). Jeśli \hat{u} jest rozwiązaniem formalnym równania (12), to liniami Stokesa dla \hat{u} są zbiory \mathcal{L}_η oraz $\mathcal{L}_{\eta+2\pi}$, natomiast liniami anty-Stokesa dla \hat{u} są zbiory $\mathcal{L}_{\eta \pm \frac{\pi}{2}}$ oraz $\mathcal{L}_{\eta+2\pi \pm \frac{\pi}{2}}$. Skoki przez linie Stokesa \mathcal{L}_η oraz $\mathcal{L}_{\eta+2\pi}$ mają odpowiednio postać:

- $u_1(t, z) - u_2(t, z) = J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -i\sqrt{\pi/tae^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}}}$, dla $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D$,
- $u_2(t, z) - u_1(t, z) = J_{\mathcal{L}_{\eta+2\pi}} \hat{u}(t, z) = u^{(\eta+2\pi)^+}(t, z) - u^{(\eta+2\pi)^-}(t, z) = i\sqrt{\pi/tae^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}}}$ dla $(t, z) \in S_{\eta+2\pi}(\pi - \varepsilon, r) \times D$.

Dowód. Rozpocznijmy od następującej uwagi

Uwaga 18. Bez straty ogólności możemy założyć w Twierdzeniu 6, że $\arg z_0 \in [0, \pi)$. Drugi przypadek, że $\arg(-z_0) \in [0, \pi)$, możemy sprowadzić do pierwszego poprzez podstawienie $\tilde{u}(t, z) := -u(t, -z)$ lub równoważnie zamieniając a na $-a$ w (15).

Niech \hat{u} będzie rozwiązaniem formalnym równania (12) z daną początkową φ postaci (15). Zauważmy, że jeśli $d \neq \eta \pmod{2\pi}$, to φ spełnia założenie (13).

Stąd, na podstawie Twierdzenia 5, szereg formalny \hat{u} jest 1-sumowalny w kierunku $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \eta \pmod{2\pi}$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że jego 1-suma spełnia

$$u^\theta(t, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{\frac{i\theta}{2}\mathbb{R}_+}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \quad \text{dla } t \in S_\theta(\pi - \varepsilon, r).$$

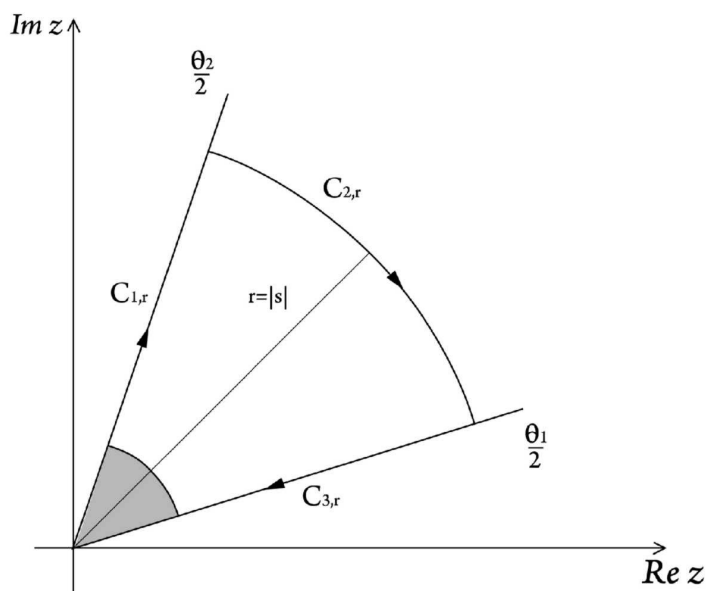
Zauważmy, że $q = 2$ jest najmniejszą dodatnią liczbą wymierną, dla której $u^\theta(t, z) = u^\theta(te^{2q\pi i}, z)$. Ponadto, zbiór kierunków osobliwych dla $\hat{u}(t, z)$ modulo 4π jest dany przez η oraz $\eta + 2\pi$. Zatem liniami Stokesa dla \hat{u} są zbiory \mathcal{L}_η oraz $\mathcal{L}_{\eta+2\pi}$, natomiast liniami anty-Stokesa dla \hat{u} są zbiory $\mathcal{L}_{\eta \pm \frac{\pi}{2}}$ oraz $\mathcal{L}_{\eta+2\pi \pm \frac{\pi}{2}}$.

Aby wyznaczyć skoki przez linie Stokesa weźmy $\theta_1, \theta_2 \neq \eta \pmod{2\pi}$ i założymy, że $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$. Wykażemy, że

$$(16) \quad u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) = -2\pi i \sum_{\tilde{z} \in B(G, \varphi, z)} \operatorname{res}_{\tilde{s}=\tilde{z}} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right]$$

dla $t \in S_{\theta_1}(\pi - \varepsilon, r) \cap S_{\theta_2}(\pi - \varepsilon, r)$ oraz $z \in D$, gdzie $G = G(\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2}) = \{z \in \tilde{\mathbb{C}} : \arg z \in (\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2})\}$, natomiast $B(G, \varphi, z)$ jest zbiorem wszystkich punktów sektora G , w których funkcja $\tilde{s} \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) \times e^{-\tilde{s}^2/4t}$ ma bieguny.

Dla $r > |z_0 - z|$ określmy $C_r = C_{1,r} \cup C_{2,r} \cup C_{3,r}$, gdzie $C_{1,r} = \{tr \times e^{\frac{i\theta_2}{2}} : t \in [0, 1]\}$, $C_{2,r} = \{re^{\frac{i(\theta_1 + (1-t)\theta_2)}{2}} : t \in [0, 1]\}$ i $C_{3,r} = \{(1-t)r \times e^{\frac{i\theta_1}{2}} : t \in [0, 1]\}$. Kontur C_r pokazany jest na Rysunku 4.1.

Rys.5. Kontur C_r na płaszczyźnie zespolonej.

Skoro φ ma wzrost eksponencjalny rzędu co najwyżej 2, to

$$u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{C_{1,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \right. \\ \left. + \int_{C_{3,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \right],$$

oraz

$$\int_{C_r} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \\ = \int_{C_{1,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \\ + \int_{C_{2,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \\ + \int_{C_{3,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s},$$

a także

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_{2,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \right| \\ & \leq \frac{\theta_2 - \theta_1}{4\sqrt{\pi t}} \sup_{|\tilde{s}|=r} \left| (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right| r \\ & \leq A e^{-Br^2} r \longrightarrow 0 \quad \text{gdy } r \longrightarrow \infty \quad (\text{dla pewnych } A, B > 0), \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 2 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} & \int_{C_r} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \\ & = -2\pi i \sum_{\tilde{z} \in B(G_r, \varphi, z)} \operatorname{res}_{\tilde{s}=\tilde{z}} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right], \end{aligned}$$

gdzie $G_r = \{z \in \tilde{\mathbb{C}} : |z| < r, \arg z \in (\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2})\}$.

Zatem

$$\begin{aligned} u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{C_{1,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \right. \\ & \quad \left. + \int_{C_{3,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{C_r} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \right. \\ & \quad \left. - \int_{C_{2,r}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} d\tilde{s} \right] \\ &= -2\pi i \sum_{\tilde{z} \in B(G, \varphi, z)} \operatorname{res}_{\tilde{s}=\tilde{z}} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right], \end{aligned}$$

co daje żadaną równość (16).

Rozważmy teraz następujące przypadki:

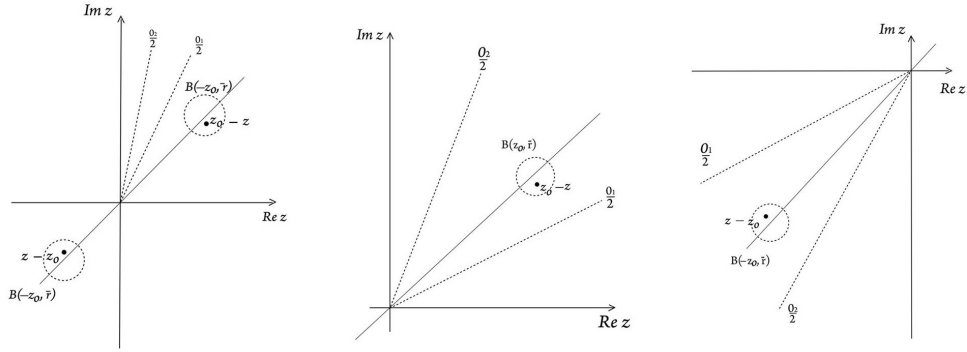
Przypadek 1: Niech $\theta_1, \theta_2 \in (\eta, \eta + 2\pi)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\theta_2 > \theta_1$. Załóżmy dodatkowo, że $\theta_2 - \theta_1 < \pi$. Skoro $\theta_1, \theta_2 \in (\eta, \eta + 2\pi)$, to istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że $\{B(z_0, \tilde{r}) \cup B(-z_0, \tilde{r})\} \cap G = \emptyset$, gdzie $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$. Wówczas, dla $z \in D_{\tilde{r}}$ zbiór $B(G, \varphi, z)$ jest pusty, a co za tym idzie na podstawie (16) otrzymujemy

$$u^{\theta_2}(t, z) = u^{\theta_1}(t, z).$$

W przypadku ogólnym, można wziąć kierunek pomocniczy $\bar{\theta} \in (\theta_1, \theta_2)$ taki, że $\theta_2 - \bar{\theta} < \pi$ oraz $\bar{\theta} - \theta_1 < \pi$. Powtarzając poprzednie rozumowanie, możemy wywnioskować, że

$$u^{\theta_2}(t, z) = u^{\bar{\theta}}(t, z) = u^{\theta_1}(t, z).$$

Dla $\theta_1, \theta_2 \in (\eta + 2\pi, \eta + 4\pi)$ otrzymamy taki sam rezultat. Stąd funkcje $u_1 := u^\theta$ dla $\theta \in (\eta, \eta + 2\pi)$ oraz $u_2 := u^\theta$ dla $\theta \in (\eta + 2\pi, \eta + 4\pi)$ są dobrze zdefiniowane, tzn. nie zależą od θ .



Rys.6 Od lewej: Przypadek 1, Przypadek 2, Przypadek 3.

Przypadek 2: Niech $\theta_1 < \eta < \theta_2$. Wówczas istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że $B(z_0, \tilde{r}) \subset G$.

Zatem $B(G, \varphi, z) = \{z_0 - z\}$ dla $z \in D_{\tilde{r}}$. W konsekwencji, na podstawie równości (16), otrzymujemy

$$\begin{aligned} u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) &= -2\pi i \operatorname{res}_{\tilde{s}=z_0-z} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right] \\ &= -i\sqrt{\pi/t} \lim_{\tilde{s} \rightarrow z_0-z} (\tilde{s} - (z_0 - z)) \left[\left(\frac{a}{\tilde{s} - (z_0 - z)} + \tilde{\varphi}(z + \tilde{s}) + \frac{a}{z - \tilde{s} - z_0} + \tilde{\varphi}(z - \tilde{s}) \right) e^{-\frac{\tilde{s}^2}{4t}} \right] \\ &= -i\sqrt{\pi/t} a e^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}} \end{aligned}$$

dla $t \in S_{\theta_1}(\pi - \varepsilon, r) \cap S_{\theta_2}(\pi - \varepsilon, r)$ oraz $z \in D_{\tilde{r}}$.

Biorąc $\theta_1 = \eta^-$ oraz $\theta_2 = \eta^+$ dostaniemy, że $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$ dla małych $\varepsilon > 0$. Zatem otrzymamy, że

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -i\sqrt{\pi/t} a e^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}} \quad \text{dla } (t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}.$$

Zauważmy, że dla $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$ mamy, że

$$-i\sqrt{\pi/t} a e^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}} \sim_1 0,$$

a w związku z tym: $u^{\eta^+}(t, z) \sim_1 \hat{u}(t, z)$ oraz $u^{\eta^-}(t, z) \sim_1 \hat{u}(t, z)$.

Przypadek 3. Załóżmy teraz, że $\theta_1 < \eta + 2\pi < \theta_2$. Wówczas $B(-z_0, \tilde{r}) \subset G$ dla pewnego $\tilde{r} > 0$.

Analogicznie do Przypadku 2, dla $z \in D_{\tilde{r}}$ mamy, że $B(G, \varphi, z) = \{z - z_0\}$. Na podstawie (16) wyznaczamy

$$\begin{aligned} u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) &= -2\pi i \operatorname{res}_{\tilde{s}=z-z_0} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right] \\ &= -i\sqrt{\pi/t} \lim_{\tilde{s} \rightarrow z-z_0} (\tilde{s} - (z-z_0)) \left[\left(\frac{a}{\tilde{s} - (z_0 - z)} + \tilde{\varphi}(z + \tilde{s}) + \frac{-a}{\tilde{s} - (z - z_0)} + \tilde{\varphi}(z - \tilde{s}) \right) e^{-\frac{\tilde{s}^2}{4t}} \right] \\ &= i\sqrt{\pi/t} a e^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}} \end{aligned}$$

dla $t \in S_{\theta_1}(\pi - \varepsilon, r) \cap S_{\theta_2}(\pi - \varepsilon, r)$ oraz $z \in D_{\tilde{r}}$.

Biorąc $\theta_1 = (\eta + 2\pi)^-$ oraz $\theta_2 = (\eta + 2\pi)^+$, dostaniemy, że $(t, z) \in S_{\eta+2\pi}(\pi - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$ dla małych $\varepsilon > 0$. Zatem

$$J_{\mathcal{L}_{\eta+2\pi}} \hat{u}(t, z) = u^{(\eta+2\pi)^+}(t, z) - u^{(\eta+2\pi)^-}(t, z) = i\sqrt{\pi/t} a e^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}}$$

dla $(t, z) \in S_{\eta+2\pi}(\pi - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$. □

Uwaga 19. Zagadnienie Cauchy'ego (12) z meromorficznymi danymi początkowymi było również rozpatrywane przez autorów Lutz, Miyake oraz Schäfke [14, Rozdział 5], ale tylko w szczególnym przypadku, gdy $\varphi(z) = \frac{1}{z}$, którego nie bierzemy pod uwagę w naszych rozważaniach.

Ponieważ równanie (12) jest liniowe to

Wniosek 1. *Założmy, że funkcja φ w równaniu (12) jest postaci*

$$(17) \quad \varphi(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{m_l} \frac{a_{lj}}{z - z_{lj}} + \tilde{\varphi}(z)$$

dla pewnych $a_{lj}, z_{lj} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $\tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C})$, gdzie $j = 1, \dots, m_l$, $l = 1, \dots, n$ oraz z_{lj} są biegunami takimi, że $\eta_l := 2 \arg(z_{l1}) = \dots = 2 \arg(z_{lm_l}) \in [0, 2\pi)$ oraz $0 \leq \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n < 2\pi$. Niech $\eta_{l+n} := \eta_l + 2\pi$ dla $l = 1, \dots, n$ oraz $u_k(t, z) := u^\theta(t, z)$ dla $\theta \in (\eta_k, \eta_{k+1}) \bmod 4\pi$ oraz $k = 1, \dots, 2n$ i $\eta_{2n+1} := \eta_1 + 4\pi$, gdzie $u^\theta(t, z)$ jest rozwiązaniem równania (12) danym przez (14).

Jeśli \hat{u} jest rozwiązaniem formalnym równania (12), to liniami Stokesa dla \hat{u} są zbiory \mathcal{L}_{η_k} , natomiast liniami anty-Stokesa są $\mathcal{L}_{\eta_k \pm \frac{\pi}{2}}$ dla $k = 1, \dots, 2n$.

Skoki przez linie Stokesa \mathcal{L}_{η_l} oraz $\mathcal{L}_{\eta_{l+n}}$ (gdzie $l = 1, \dots, n$) mają odpowiednio postać:

- $u_l(t, z) - u_{l-1}(t, z) = J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, z) = u^{\eta_l^+}(t, z) - u^{\eta_l^-}(t, z)$
 $= -i\sqrt{\pi/t} \sum_{j=1}^{m_l} a_{lj} e^{-\frac{(z_{lj}-z)^2}{4t}}$ dla $(t, z) \in S_{\eta_l}(\pi - \varepsilon, r) \times D$ z notacją $u_0(t, z) := u_{2n}(t, z)$,
- $u_{l+n}(t, z) - u_{l-1+n}(t, z) = J_{\mathcal{L}_{\eta_{l+n}}} \hat{u}(t, z) = u^{\eta_{l+n}^+}(t, z) - u^{\eta_{l+n}^-}(t, z)$
 $= i\sqrt{\pi/t} \sum_{j=1}^{m_l} a_{lj} e^{-\frac{(z_{lj}-z)^2}{4t}}$ dla $(t, z) \in S_{\eta_{l+n}}(\pi - \varepsilon, r) \times D$.

Dowód. Wystarczy wyznaczyć skoki przez linie Stokesa \mathcal{L}_{η_l} oraz $\mathcal{L}_{\eta_{l+n}}$. Aby to zrobić, ustalmy $l \in \{1, \dots, n\}$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $r, \tilde{r} > 0$ takie, że różnica $u^{\eta_l^+}(t, z) - u^{\eta_l^-}(t, z)$ spełnia równość (16) dla $(t, z) \in S_{\eta_l}(\pi - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$ ze zbiorem $B(G, \varphi, z) = \{z_{l_1} - z, \dots, z_{l_{m_l}} - z\}$. Stąd

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta_l^+}(t, z) - u^{\eta_l^-}(t, z) \\ &= -2\pi i \sum_{j=1}^{m_l} \operatorname{res}_{\tilde{s}=z_{lj}-z} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right] \\ &= -i\sqrt{\pi/t} \sum_{j=1}^{m_l} a_{lj} e^{-\frac{(z_{lj}-z)^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Aby wyliczyć różnicę $J_{\mathcal{L}_{\eta_{l+n}}} \hat{u}(t, z) = u^{\eta_{l+n}^+}(t, z) - u^{\eta_{l+n}^-}(t, z)$ wystarczy powtórzyć poprzednie rozważania ze zbiorem $B(G, \varphi, z) = \{z - z_{l_1}, \dots, z - z_{l_{m_l}}\}$ dla $(t, z) \in S_{\eta_{l+n}}(\pi - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$. \square

Uwaga 20. Podobnie jak w Uwadze 18 możemy zredukować postać (17) z $\arg z_{lj} \in [0, 2\pi)$ do przypadku z $\arg z_{lj} \in [0, \pi)$ poprzez ewentualną zamianę a_{lj} na $-a_{lj}$.

Wniosek 2. Załóżmy teraz, że funkcja φ w równaniu (12) jest dana wzorem

$$\varphi(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{1-n}}{(z - z_0)^{n-1}} + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \tilde{\varphi}(z),$$

dla pewnych $n \in \mathbb{N}$, $a_{-1}, \dots, a_{1-n} \in \mathbb{C}$, $a_{-n}, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $\tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C})$. W tym przypadku otrzymamy taką samą tezę jak w Twierdzeniu 6, jednakże skoki przez linie Stokesa \mathcal{L}_{η} oraz $\mathcal{L}_{\eta+2\pi}$ będą miały odpowiednio postać:

- $u_1(t, z) - u_2(t, z) = J_{\mathcal{L}_{\eta}} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z)$
 $= -i\sqrt{\pi/t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a_{k-n}}{(n-k-1)!} \lim_{s \rightarrow z_0 - z} \frac{d^{n-k-1}}{ds^{n-k-1}} \left(e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) \right]$
dla $(t, z) \in S_{\eta}(\pi - \varepsilon, r) \times D$,

$$\begin{aligned}
\bullet \quad u_2(t, z) - u_1(t, z) &= J_{\mathcal{L}_{\eta+2\pi}} \hat{u}(t, z) = u^{(\eta+2\pi)^+}(t, z) - u^{(\eta+2\pi)^-}(t, z) \\
&= -i\sqrt{\pi/t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^{k-n} a_{k-n}}{(n-k-1)!} \lim_{\tilde{s} \rightarrow z-z_0} \frac{d^{n-k-1}}{d\tilde{s}^{n-k-1}} \left(e^{\frac{-\tilde{s}^2}{4t}} \right) \right], \\
&\text{dla } (t, z) \in S_{\eta+2\pi}(\pi - \varepsilon, r) \times D.
\end{aligned}$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6 mamy, że

$$\begin{aligned}
u_1(t, z) - u_2(t, z) &= J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) \\
&= -2\pi i \operatorname{res}_{\tilde{s}=z_0-z} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right] \\
&= \frac{-i\sqrt{\pi/t}}{(n-1)!} \lim_{\tilde{s} \rightarrow z_0-z} \frac{d^{n-1}}{d\tilde{s}^{n-1}} \left[\left(\frac{a_{-1}}{(\tilde{s} - (z_0 - z))^{1-n}} + \dots + \frac{a_{1-n}}{(\tilde{s} - (z_0 - z))^{-1}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a_{-n} + (\tilde{s} - (z_0 - z))^n \tilde{\varphi}(z + \tilde{s}) \right) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right] \\
&= -i\sqrt{\pi/t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a_{k-n}}{(n-k-1)!} \lim_{\tilde{s} \rightarrow z_0-z} \frac{d^{n-k-1}}{d\tilde{s}^{n-k-1}} \left(e^{\frac{-\tilde{s}^2}{4t}} \right) \right]
\end{aligned}$$

dla $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D$.

Analogicznie

$$\begin{aligned}
u_2(t, z) - u_1(t, z) &= J_{\mathcal{L}_{\eta+2\pi}} \hat{u}(t, z) = u^{(\eta+2\pi)^+}(t, z) - u^{(\eta+2\pi)^-}(t, z) \\
&= -2\pi i \operatorname{res}_{\tilde{s}=z-z_0} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (\varphi(z + \tilde{s}) + \varphi(z - \tilde{s})) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right] \\
&= \frac{-i\sqrt{\pi/t}}{(n-1)!} \lim_{\tilde{s} \rightarrow z-z_0} \frac{d^{n-1}}{d\tilde{s}^{n-1}} \left[\left(\frac{-a_{-1}}{(\tilde{s} - (z - z_0))^{1-n}} + \dots + \frac{(-1)^{1-n} a_{1-n}}{(\tilde{s} - (z - z_0))^{-1}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (-1)^{-n} a_{-n} + (\tilde{s} - (z - z_0))^n \tilde{\varphi}(z - \tilde{s}) \right) e^{-\tilde{s}^2/4t} \right] \\
&= -i\sqrt{\pi/t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^{k-n} a_{k-n}}{(n-k-1)!} \lim_{\tilde{s} \rightarrow z-z_0} \frac{d^{n-k-1}}{d\tilde{s}^{n-k-1}} \left(e^{\frac{-\tilde{s}^2}{4t}} \right) \right]
\end{aligned}$$

dla $(t, z) \in S_{\eta+2\pi}(\pi - \varepsilon, r) \times D$. □

Uwaga 21. Analogicznie do Wniosku 1 i Wniosku 2 możemy także wyznaczyć linie Stokesa, linie anty-Stokesa i skoki w ogólnym przypadku, gdy funkcja φ w równaniu (12) jest meromorficzna i ma skończoną liczbę biegunów tzn. jest postaci

(18)

$$\varphi(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^{r_l} \frac{a_{lk}}{(z - z_l)^k} + \tilde{\varphi}(z), \quad \text{gdzie } z_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C}).$$

4.2. **Uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego.** W tym podrozdziale uogólnimy poprzednio otrzymane wyniki.

Rozważmy równanie

$$(19) \quad \begin{cases} \partial_t^p u(t, z) = \partial_z^q u(t, z), & p, q \in \mathbb{N} \\ u(0, z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D) \\ \partial_t^j u(0, z) = 0 \text{ dla } j = 1, 2, \dots, p-1. \end{cases}$$

Powyższe równanie ma jednoznaczne rozwiązanie formalne postaci

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(qn)}(z)t^{pn}}{(pn)!}.$$

Zwróćmy uwagę, że rezultat dotyczący sumowalności szeregu $\hat{u}(t, z)$ został już udowodniony przez M. Miyake [22]. Natomiast postać całkowa $\frac{p}{q-p}$ -sumy $u(t, z)$, w terminach uogólnionych hipergeometrycznych szeregów Barnes'a została uzyskana przez K. Ichinobe [7, Twierdzenie 5.1]. W tej pracy przedstawimy inną postać $\frac{p}{q-p}$ -sumy, która według nas jest bardziej użyteczna przy rozważaniu zjawiska Stokesa.

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że $\hat{u}(t, z)$ jest rozwiązaniem formalnym równania (19), gdzie $1 \leq p < q$ oraz*

$$(20) \quad \varphi(z) \in \mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}} \left(D \cup \bigcup_{l=0}^{q-1} S_{\frac{dp}{q} + \frac{2\pi l}{q}} \left(\frac{\varepsilon p}{q} \right) \right) \quad \text{dla pewnego } \varepsilon > 0.$$

Wówczas $\hat{u}(t, z)$ jest $\frac{p}{q-p}$ -sumowalny w kierunku d oraz dla każdego $\theta \in (d - \frac{\varepsilon}{2}, d + \frac{\varepsilon}{2})$ oraz dla każdego $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że jego $\frac{p}{q-p}$ -suma $u^\theta \in \mathcal{O}(S_\theta(\frac{\pi(q-p)}{p} - \tilde{\varepsilon}, r) \times D)$ określona jest następującym wzorem

$$(21) \quad \begin{aligned} u(t, z) &= u^\theta(t, z) = E_{\frac{p}{q-p}, \theta} \check{B}_{\frac{p}{q-p}} \hat{u}(t, z) \\ &= \frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{\frac{i\theta p}{q}} \mathbb{R}_+} \left(\varphi(z + \tilde{s}) + \dots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \tilde{s}) \right) C_{\frac{q}{p}}(\tilde{s}/\sqrt[q]{t^p}) d\tilde{s} \end{aligned}$$

dla $t \in S_\theta(\frac{\pi(q-p)}{p} - \tilde{\varepsilon}, r)$ oraz $z \in D$.

Ponadto, dla każdego $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że $u \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi(q-p)}{p} + \bar{\varepsilon}, r) \times D)$.

Dowód. Używając procedury opisanej w Podrozdziale 2.6, najpierw otrzymamy, że

$$\begin{aligned} v(t, z) &= (\check{B}_{\frac{p}{q-p}} \hat{u})(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(qn)}(z) (t^{\frac{p}{q}})^{qn}}{(qn)!} \\ &= \frac{1}{q} \left(\varphi(z + \sqrt[q]{t^p}) + \varphi(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} \sqrt[q]{t^p}) + \cdots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \sqrt[q]{t^p}) \right). \end{aligned}$$

Skoro $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}} \left(D \cup \bigcup_{l=0}^{q-1} S_{\frac{dp}{q} + \frac{2\pi i l}{q}} \left(\frac{\varepsilon p}{q} \right) \right)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, to $v(t, z) \in \mathcal{O}_{\frac{p}{q-p}} \left((S_d(\varepsilon) \cup D) \times D \right)$.

Zatem

$$\begin{aligned} u^\theta(t, z) &= (E_{\frac{p}{q-p}, \theta} v)(t, z) = \frac{1}{\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i\theta} \mathbb{R}_+} v(s, z) C_{\frac{q}{p}} \left((s/t)^{\frac{p}{q}} \right) ds^{\frac{p}{q}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i\theta} \mathbb{R}_+} \frac{1}{q} \left(\varphi(z + \sqrt[q]{s^p}) + \cdots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \sqrt[q]{s^p}) \right) C_{\frac{q}{p}} \left((s/t)^{\frac{p}{q}} \right) ds^{\frac{p}{q}} \\ &\stackrel{\sqrt[q]{s^p} = \tilde{s}}{=} \frac{1}{q \sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{\frac{i\theta p}{q}} \mathbb{R}_+} \left(\varphi(z + \tilde{s}) + \cdots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \tilde{s}) \right) C_{\frac{q}{p}} \left(\tilde{s} / \sqrt[q]{t^p} \right) d\tilde{s}, \end{aligned}$$

dla $\arg t \in \left(-\frac{\pi(q-p)}{2p} + \tilde{\varepsilon} + \theta, \frac{\pi(q-p)}{2p} - \tilde{\varepsilon} + \theta \right)$.

Biorąc $k = \frac{p}{q-p}$ w Uwadze 15 wnioskujemy, że dla każdego $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że $u \in \mathcal{O} \left(S_d \left(\frac{\pi(q-p)}{p} + \bar{\varepsilon}, r \right) \times D \right)$. \square

Twierdzenie 8. *Załóżmy, że funkcja φ w równaniu (19) ma wzór*

$$(22) \quad \varphi(z) = \frac{a}{z - z_0} + \tilde{\varphi}(z) \quad \text{dla pewnych } a, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{oraz } \tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}}(\mathbb{C}).$$

Niech $\eta_l := \frac{q}{p} \arg z_0 + \frac{2(l-1)\pi}{p}$ ($l = 1, \dots, q+1$) oraz $u_l := u^\theta$ dla $\theta \in (\eta_l, \eta_{l+1}) \bmod \frac{2q\pi}{p}$ oraz $l = 1, \dots, q$, gdzie u^θ jest rozwiązaniem równania (19) mającym postać (21).

Jeśli \hat{u} jest rozwiązaniem formalnym równania (19), to linie Stokesa dla \hat{u} są zbiorami \mathcal{L}_{η_l} , a linie anty-Stokesa dla \hat{u} są zbiorami $\mathcal{L}_{\eta_l \pm \frac{\pi(q-p)}{2p}}$. Skoki przez linie Stokesa \mathcal{L}_{η_l} ($l = 1, \dots, q$) są postaci

$$\begin{aligned} u_l(t, z) - u_{l-1}(t, z) &= J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, z) = u^{\eta_l^+}(t, z) - u^{\eta_l^-}(t, z) \\ &= -\frac{2\pi i}{q \sqrt[q]{t^p}} e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} a C_{\frac{q}{p}} \left(\frac{(z_0 - z) e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}{\sqrt[q]{t^p}} \right) \end{aligned}$$

dla $(t, z) \in S_{\eta_l} \left(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r \right) \times D$ z notacją $u_0(t, z) = u_q(t, z)$.

Dowód. Niech \hat{u} będzie rozwiązaniem formalnym równania (19), w którym φ dane jest jako (22). Zauważmy, że jeśli $d \neq \eta_l \pmod{\frac{2q\pi}{p}}$ dla $l = 1, \dots, q$, to φ spełnia założenie (20).

Z Twierdzenia 7, \hat{u} jest $\frac{p}{q-p}$ -sumowalny w kierunku $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \eta_l \pmod{\frac{2q\pi}{p}}$ dla $l = 1, \dots, q$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że jego $\frac{p}{q-p}$ -suma to

$$u^\theta(t, z) = \frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{\frac{i\theta p}{q}} \mathbb{R}_+} \left(\varphi(z + \tilde{s}) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \tilde{s}\right) \right) C_{\frac{q}{p}}(\tilde{s}/\sqrt[q]{t^p}) d\tilde{s}$$

dla $(t, z) \in S_\theta\left(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r\right) \times D$.

Zauważmy, że $u^\theta(t, z) = u^\theta\left(te^{\frac{2q\pi i}{p}}, z\right)$ oraz $\frac{q}{p}$ jest najmniejszą dodatnią liczbą wymierną, dla której ta równość zachodzi. Liniami Stokesa dla \hat{u} są zbiory \mathcal{L}_{η_l} , natomiast liniami anty-Stokesa dla \hat{u} są zbiory $\mathcal{L}_{\eta_l \pm \frac{\pi(q-p)}{2p}}$.

Do wyliczenia skoków przez linie Stokesa weźmy $\theta_1, \theta_2 \neq \eta_l \pmod{\frac{2q\pi}{p}}$ i przyjmijmy, że $0 < \theta_2 - \theta_1 < \frac{2\pi}{p}$. Postępując jak w dowodzie Twierdzenia 6 otrzymujemy, że

$$(23) \quad u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) = -2\pi i \sum_{\tilde{z} \in B_{p,q}(G, \varphi, z)} \operatorname{res}_{\tilde{s}=\tilde{z}} \left[\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \left(\varphi(z + \tilde{s}) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \tilde{s}\right) \right) C_{\frac{q}{p}}(\tilde{s}/\sqrt[q]{t^p}) \right]$$

dla $t \in S_{\theta_1}\left(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r\right) \cap S_{\theta_2}\left(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r\right)$ oraz $z \in D$, gdzie $G = G\left(\frac{p\theta_1}{q}, \frac{p\theta_2}{q}\right) = \{z \in \tilde{\mathbb{C}} : \arg z \in \left(\frac{p\theta_1}{q}, \frac{p\theta_2}{q}\right)\}$ oraz $B_{p,q}(G, \varphi, z)$ jest zbiorem wszystkich punktów sektora G , w których funkcja

$$\tilde{s} \mapsto \frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \left(\varphi(z + \tilde{s}) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \tilde{s}\right) \right) C_{\frac{q}{p}}(\tilde{s}/\sqrt[q]{t^p})$$

ma bieguny.

Analogicznie do dowodu Twierdzenia 6 rozważmy następujące przypadki:

Przypadek 1: Niech $\theta_1, \theta_2 \in (\eta_{l-1}, \eta_l)$ dla pewnego $l = 1, \dots, q$. Skoro $\theta_1, \theta_2 \in (\eta_{l-1}, \eta_l)$, to istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że $B(z_0 e^{-\frac{2(j-1)\pi i}{q}}, \tilde{r}) \cap G = \emptyset$ dla $j = 1, \dots, q$. Wówczas, dla $z \in D_{\tilde{r}}$ zbiór $B_{p,q}(G, \varphi, z)$ jest pusty, a stąd na podstawie równości (23) otrzymujemy

$$u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) = 0.$$

Przypadek 2: Niech $\theta_1 < \eta_l < \theta_2$ dla pewnego $l = 1, \dots, q$. Wówczas istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że $B(z_0 e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}, \tilde{r}) \subset G$. Zatem otrzymujemy, że

$B_{p,q}(G, \varphi, z) = \{(z_0 - z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}\}$ dla $z \in D_{\tilde{r}}$. W konsekwencji, używając równości (23) mamy, że

$$\begin{aligned} & u^{\theta_2}(t, z) - u^{\theta_1}(t, z) \\ &= -2\pi i \operatorname{res}_{\tilde{s}=(z_0-z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}} \left[\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \left(\varphi(z+\tilde{s}) + \dots + \varphi\left(z+e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}}\tilde{s}\right) \right) C_{\frac{q}{p}}(\tilde{s}/\sqrt[q]{t^p}) \right] \\ &= -\frac{2\pi i}{q\sqrt[q]{t^p}} \operatorname{res}_{\tilde{s}=(z_0-z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}} \left[\left(\frac{a}{\tilde{s} - (z_0 - z)} + \dots + \frac{e^{-\frac{2(q-1)\pi i}{q}} a}{\tilde{s} - e^{-\frac{2(q-1)\pi i}{q}}(z_0 - z)} \right) C_{\frac{q}{p}}(\tilde{s}/\sqrt[q]{t^p}) \right] \\ &= -\frac{2\pi i}{q\sqrt[q]{t^p}} e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} a C_{\frac{q}{p}} \left(\frac{(z_0 - z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}{\sqrt[q]{t^p}} \right), \end{aligned}$$

dla $t \in S_{\theta_1}(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r) \cap S_{\theta_2}(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r)$ oraz $z \in D_{\tilde{r}}$.

Biorąc $\theta_1 = \eta_l^-$ oraz $\theta_2 = \eta_l^+$ dostaniemy, że $(t, z) \in S_{\eta_l}(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$ dla małych $\varepsilon > 0$. Zatem

$$J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, z) = u^{\eta_l^+}(t, z) - u^{\eta_l^-}(t, z) = -\frac{2\pi i}{q\sqrt[q]{t^p}} e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} a C_{\frac{q}{p}} \left(\frac{(z_0 - z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}{\sqrt[q]{t^p}} \right),$$

dla $(t, z) \in S_{\eta_l}(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$.

Zauważmy, że dla $(t, z) \in S_{\eta_l}(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r) \times D_{\tilde{r}}$ zachodzi

$$-\frac{2\pi i}{q\sqrt[q]{t^p}} e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} a C_{\frac{q}{p}} \left(\frac{(z_0 - z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}{\sqrt[q]{t^p}} \right) \sim_{\frac{p}{q-p}} 0.$$

Zatem $u^{\eta_l^+}(t, z) \sim_{\frac{p}{q-p}} \hat{u}(t, z)$ oraz $u^{\eta_l^-}(t, z) \sim_{\frac{p}{q-p}} \hat{u}(t, z)$. \square

Uwaga 22. Podobnie jak dla równania przewodnictwa cieplnego możemy również wyznaczyć linie Stokesa, linie anty-Stokesa oraz skoki w przypadku, gdy φ w równaniu (19) jest funkcją meromorficzną postaci (18) z $\tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}}(\mathbb{C})$.

5. ZJAWISKO STOKESA W TERMINACH HIPERFUNKCJI

W tej części przejdziemy do opisu skoków przez linie Stokesa przy pomocy hiperfunkcji. Podobne podejście do problemu można znaleźć w [8, 15, 23].

Rozpocznijmy od przypomnienia podstawowych informacji dotyczących teorii dystrybucji stworzonej przez Laurenta Schwartza pod koniec lat 40-tych XX wieku, a także od hiperfunkcji skonstruowanych przez Mikio Sato w 1958 roku (więcej informacji o teorii dystrybucji można znaleźć w [6], a o teorii hiperfunkcji w [10]).

5.1. Dystrybucje i hiperfunkcje. *Notacja.* Nośnikiem funkcji φ nazywamy zbiór $\text{supp } \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$. Przestrzeń wszystkich funkcji φ klasy \mathcal{C}^∞ o zwartym nośniku na \mathbb{R} będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Zbiór wszystkich mierzalnych funkcji $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ takich, że $\int_K |f| dx < \infty$ dla każdego zwartego zbioru $K \subset \Omega$ będziemy oznaczać przez $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Ponadto dla multiindeksu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ oznaczymy $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ oraz $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Definicja 39. Przez *przestrzeń funkcji próbnych* $\mathcal{D}(\Omega)$ na zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będziemy rozumieć klasę funkcji $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ z następującą zbieżnością: powiemy, że ciąg $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ jest zbieżny do funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ w $\mathcal{D}(\Omega)$ jeśli

- 1) istnieje zbiór zwarty $K \subset \Omega$ taki, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ nośnik funkcji φ_k jest zawarty w zbiorze K
- 2) dla każdego $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ zachodzi zbieżność jednostajna $D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows D^\alpha \varphi(x)$ w Ω .

Definicja 40. *Dystrybucją* w zbiorze Ω nazywać będziemy funkcjonal liniowy i ciągły na $\mathcal{D}(\Omega)$. Przestrzeń wszystkich dystrybucji będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Przykład 10. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Każda funkcja $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ definiuje dystrybucję $f[\varphi] = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Dystrybucje dające się zapisać w tej postaci będziemy nazywać *regularnymi*. Warto zauważyć, że szczególnym przypadkiem takiej funkcji jest funkcja Heaviside'a określona na \mathbb{R} wzorem

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } x > 0 \\ 0 & , \text{ dla } x < 0. \end{cases}$$

Przykład 11. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym takim, że $0 \in \Omega$ oraz niech δ oznacza funkcję delta Diraca. Wówczas dla każdego $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ mamy, że $\delta[\varphi] = \varphi(0)$. Zatem δ jest dystrybucją, która nie jest regularna.

Przejdźmy teraz do przypomnienia definicji różniczkowania dystrybucji.

Definicja 41. Niech $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, gdzie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Funkcjonał zdefiniowany wzorem $D^\alpha f[\varphi] := (-1)^{|\alpha|} f[D^\alpha \varphi]$ dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nazywamy D^α -*pochođną dystrybucji* f . W przypadku, gdy $n = 1$ będziemy pisać $f^{(\alpha)}[\varphi] := (-1)^\alpha f[\varphi^{(\alpha)}]$.

Przykład 12. Rozważmy ponownie funkcję delta Diraca. Zauważmy, że dla $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ pierwsza pochodna ma postać

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0)$$

oraz jeżeli $k \in \mathbb{N}_+$, to k -ta pochodna ma postać

$$\delta^{(k)}[\varphi] = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

Przykład 13. Rozważmy ponownie funkcję Heaviside'a na \mathbb{R} . Wówczas dla $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ mamy, że

$$H'[\varphi] = (-1)H[\varphi'] = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta[\varphi],$$

natomiast jeżeli $k \in \mathbb{N}_+$, to k -ta pochodna ma postać

$$H^{(k)}[\varphi] = (-1)^k [\varphi^{(k)}] = (-1)^k \int_0^\infty \varphi^{(k)}(x)dx = (-1)^{k+1} \varphi^{(k-1)}(0) = \delta^{(k-1)}[\varphi].$$

Wprowadźmy jeszcze definicję dystrybucyjnych wartości brzegowych i przypomnijmy stwierdzenie z nimi związane.

Definicja 42 ([25, Definicja 3.1]). Niech V będzie zbiorem otwartym w \mathbb{C} , $V \cap \mathbb{R} = \Omega$ oraz $F \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$. Przypuśćmy, że istnieje granica

$$b_\pm F[\varphi] = F(\cdot \pm i0)[\varphi] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\Omega F(\alpha \pm i\varepsilon) \varphi(\alpha) d\alpha$$

dla każdego $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Wówczas $b_\pm F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i nazywamy je *dystrybucyjnymi wartościami brzegowymi odpowiednio z góry (+) i z dołu (-)*. Różnicę $bF = b_+F - b_-F$ (będącą również dystrybucją w $\mathcal{D}'(\Omega)$) nazywamy *skokiem* F przez \mathbb{R} .

Teraz podamy warunek, dzięki któremu funkcja holomorphyzna F będzie miała dystrybucyjne wartości brzegowe $b_\pm F$.

Definicja 43 (zobacz strona 20, [25]). Niech V będzie zbiorem otwartym w \mathbb{C} , $V \cap \mathbb{R} = \Omega$ oraz $F \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$. Powiemy, że funkcja F ma *wielomianowy wzrost przy osi rzeczywistej*, jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieją stałe $N = N(K) \in \mathbb{N}$, $C = C(K)$ oraz $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ takie, że

$$|F(\alpha + i\beta)| \leq C|\beta|^{-N}, \quad \text{dla } \alpha \in K, 0 < |\beta| < \varepsilon.$$

Stwierdzenie 7 ([25, Twierdzenie 3.2]). Niech $F \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ ma wielomianowy wzrost przy osi rzeczywistej. Wówczas dystrybucyjne wartości brzegowe $b_{\pm}F$ istnieją oraz $bF = b_+F - b_-F \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Przypomnijmy jeszcze jedno ważne twierdzenie dla dystrybucji, które będzie nam potrzebne w dalszych rozważaniach.

Stwierdzenie 8. (Lokalne twierdzenie strukturalne dla dystrybucji) [6, Stwierdzenie 7.1] Niech Ω będzie zbiorem otwartym w \mathbb{R}^n , $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ oraz niech K będzie zbiorem zwartym w Ω . Wówczas istnieją funkcja f ciągła na Ω oraz $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ takie, że

$$T = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \text{ na } \mathcal{D}_K(\Omega),$$

gdzie $\mathcal{D}_K(\Omega)$ jest zbiorem wszystkich funkcji $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ klasy $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o nośniku zawartym w zbiorze K .

Przejdźmy teraz do krótkiego opisu hiperfunkcji, które w odróżnieniu od dystrybucji definiuje się za pomocą wartości brzegowych funkcji holomorphyznych. Warto podkreślić, że dystrybucje stanowią podzbiór w klasie hiperfunkcji.

Zacznijmy od następującej definicji

Definicja 44. Otwarty jednospójny zbiór $V \subset \mathbb{C}$ nazywamy zespolonym otoczeniem zbioru $E \subset \mathbb{R}$, jeżeli zbiór E jest relatywnie domkniętym podzbiorem zbioru V .

Definicja 45. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym, V będzie zespolonym otoczeniem zbioru Ω oraz $F \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$. Klasę równoważności $[F]$ funkcji F w $\mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ modulo $\mathcal{O}(V)$ nazywamy hiperfunkcją na Ω . Natomiast funkcję F nazywamy funkcją definiującą dla hiperfunkcji $[F]$. Przestrzeń wszystkich hiperfunkcji na otwartym zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}$ będziemy oznaczać przez $\mathfrak{B}(\Omega)$, to znaczy $\mathfrak{B}(\Omega) = \mathcal{O}(V \setminus \Omega) / \mathcal{O}(V)$.

Przykład 14. Jedne z najważniejszych hiperfunkcji to

- a) delta Diraca $\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi iz} \right]$, gdzie $\operatorname{Re} z = x$,
- b) funkcja Heaviside'a $H(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i} \ln(-z) \right]$, gdzie $\operatorname{Re} z = x$.

Tak jak w przypadku dystrybucji możemy zdefiniować różniczkowanie hiperfunkcji.

Definicja 46. Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Dla hiperfunkcji $f = [F] \in \mathfrak{B}(\Omega)$ definiujemy n -tą pochodną $f^{(n)} := [F^{(n)}] \in \mathfrak{B}(\Omega)$.

Przykład 15. Wyznaczmy pochodną delty Diraca

$$\delta'(x) = \left[\left(-\frac{1}{2\pi iz} \right)' \right] = \left[\frac{1}{2\pi iz^2} \right],$$

ogólniej dla $n \in \mathbb{N}_+$

$$\delta^{(n)}(x) = \left[\left(-\frac{1}{2\pi iz} \right)^{(n)} \right] = \left[\frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi iz^{n+1}} \right],$$

przy czym $\operatorname{Re} z = x$.

Przykład 16. Obliczmy pochodną funkcji Heaviside'a

$$H'(x) = \left[\left(-\frac{1}{2\pi i} \ln(-z) \right)' \right] = \left[-\frac{1}{2\pi iz} \right] = \delta(x),$$

natomiast dla $n \in \mathbb{N}_+$

$$H^{(n)}(x) = \left[\left(-\frac{1}{2\pi i} \ln(-z) \right)^{(n)} \right] = \delta^{(n-1)}(x),$$

przy czym $\operatorname{Re} z = x$.

Zajmijmy się teraz włożeniem funkcji analitycznych w hiperfunkcje. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym i niech $\mathcal{A}(\Omega)$ oznacza przestrzeń funkcji analitycznych na Ω . Skoro każda funkcja analityczna na Ω rozszerza się na zespolone otoczenie U zbioru Ω , to można zapisać, że przestrzeń $\mathcal{A}(\Omega)$ jest równa granicy induktywnej przestrzeni $\mathcal{O}(U)$ dla $U \supset \Omega$, czyli

$$\mathcal{A}(\Omega) = \varinjlim_{U \supset \Omega} \mathcal{O}(U).$$

Przestrzeń dualną do przestrzeni $\mathcal{A}(\Omega)$ będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{A}'(\Omega)$.

Definicja 47. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym, $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$ i niech $\Phi \in \mathcal{O}(U)$ będzie takie, że $\Phi|_{\Omega} = \varphi$, gdzie U jest zespolonym otoczeniem zbioru Ω . Ponadto niech $U_+ = U \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $U_- = U \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ oraz

$$\Phi_+(z) = \begin{cases} \Phi(z) & , \text{ dla } z \in U_+ \\ 0 & , \text{ dla } z \in U_- \end{cases}$$

Definiujemy *włożenie* $\mathcal{A}(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{B}(\Omega)$ wzorem

$$\mathcal{A}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto [\Phi_+] \in \mathfrak{B}(\Omega).$$

Wówczas mówimy, że hiperfunkcja $[\Phi_+]$ *zgadza się* z funkcją analityczną φ .

Oczywiście wyżej zdefiniowane odwzorowanie zgadza się z odwzorowaniem

$$\mathcal{A}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto -[\Phi_-] \in \mathfrak{B}(\Omega),$$

gdzie

$$\Phi_-(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ dla } z \in U_+ \\ \Phi(z) & , \text{ dla } z \in U_-. \end{cases}$$

Przykład 17. Rozważmy funkcję analityczną $\varphi(x) = e^{-1/x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z jednej strony łatwo widać, że φ nie przedłuża się do funkcji analitycznej na \mathbb{R} . Zaś z drugiej strony hiperfunkcja $f = [\Phi_+]$ z funkcją definiującą

$$\Phi_+(z) = \begin{cases} e^{-1/z} & , \text{ dla } \text{Im } z > 0 \\ 0 & , \text{ dla } \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

należy do $\mathfrak{B}(\Omega)$. Jej obcięcie do $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zgadza się z funkcją analityczną $\varphi(x)$. Innymi słowy funkcja analityczna φ rozpatrywana jako hiperfunkcja przedłuża się do hiperfunkcji f na \mathbb{R} .

Przejdźmy teraz do nośników hiperfunkcji i twierdzenia Köthe'go.

Definicja 48. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym. *Nośnikiem hiperfunkcji f* nazywamy najmniejszy domknięty podzbiór zbioru Ω taki, że f jest równa zero na jego dopełnieniu w Ω . Nośnik hiperfunkcji f oznaczamy jako $\text{supp } f$.

Definicja 49. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym oraz niech K będzie zbiorem zwartym zawartym w Ω . Przez *przestrzeń hiperfunkcji na Ω o zwartym nośniku w K* rozumiemy zbiór postaci

$$\mathfrak{B}_K(\Omega) := \{f \in \mathfrak{B}(\Omega) : \text{supp } f \subset K\}.$$

Stwierdzenie 9 (Stwierdzenie 4.1, [25]). *Ustalmy zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}$. Wówczas dla każdego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}$ zawierającego zbiór K i dla każdego zespolonego otoczenia U zbioru Ω zachodzi izomorfizm*

$$\mathfrak{B}_K(\Omega) \simeq \mathcal{O}(U \setminus K) / \mathcal{O}(U).$$

Ponadto, jeżeli Ω_1, Ω_2 są dwoma zbiorami otwartymi w \mathbb{R} zawierającymi zbiór K , to $\mathfrak{B}_K(\Omega_1) \simeq \mathfrak{B}_K(\Omega_2)$. W związku z tym przestrzeń $\mathfrak{B}_K(\Omega)$ będziemy krótko oznaczać przez \mathfrak{B}_K .

Notacja. Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym. Zbiór wszystkich kielków holomorficzych na zbiorze K wraz ze strukturą przestrzeni wektorowej tworzy przestrzeń, którą będziemy oznaczać przez $\mathcal{A}(K)$. Natomiast przez $\mathcal{A}'(K)$ będziemy oznaczać przestrzeń funkcjonałów analitycznych na zbiorze K , czyli przestrzeń dualną do $\mathcal{A}(K)$.

Stwierdzenie 10 (Twierdzenie Köthe'go, [11], Twierdzenie 4.4 w [25]). *Dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}$ istnieje naturalny izomorfizm $\mathfrak{B}_K \simeq \mathcal{A}'(K)$ dany przez*

$$\mathcal{I}: \mathfrak{B}_K \ni f \longmapsto \mathcal{I}f \in \mathcal{A}'(K),$$

przy czym $\mathcal{I}f$ jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{A}(K) \ni \varphi \longmapsto \mathcal{I}f[\varphi] := - \int_{\gamma} F(z)\varphi(z)dz,$$

gdzie $f = [F]$ oraz γ jest krzywą zamkniętą bez samoprzecięć zorientowaną dodatnio otaczającą zbiór K i leżącą we wspólnym obszarze holomorficzności F i φ .

Odwzorowanie odwrotne to $\mathcal{A}'(K) \ni g \longmapsto \mathcal{J}g = [Cg] \in \mathfrak{B}_K$, gdzie $Cg(z) := -\frac{1}{2\pi i} g\left[\frac{1}{z-\alpha}\right]$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus K$ jest transformatą Cauchy'ego dla g .

Na końcu tego podrozdziału rozważmy włożenie dystrybucji w hiperfunkcje.

Niech K będzie zbiorem zwartym zawartym w \mathbb{R} . Przypomnijmy, że $\mathcal{D}_K(\Omega)$ jest przestrzenią wszystkich funkcji $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ klasy $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ o nośniku zawartym w zbiorze K . Przestrzeń dualną do niej oznaczamy przez $\mathcal{D}'_K(\Omega)$ i będziemy nazywać *przestrzenią dystrybucji na K* . Zauważmy, że każda dystrybucja $u \in \mathcal{D}'_K$ może być rozważana jako element $\mathcal{A}'(K)$, to znaczy, że istnieje naturalne włożenie $\mathcal{D}'_K \hookrightarrow \mathcal{A}'(K)$.

Na podstawie Stwierdzenia 10 otrzymujemy włożenie

$$(24) \quad \mathcal{D}'_K \ni u \longmapsto [Cu] \in \mathfrak{B}_K, \quad \text{gdzie} \quad (Cu)(z) = -\frac{1}{2\pi i} u\left[\frac{1}{z-\alpha}\right].$$

Ponadto, zauważmy, że każda dystrybucja $u \in \mathcal{D}'_K$ może być także rozważana jako skok funkcji $Cu \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ wielomianowego wzrostu przy osi rzeczywistej. Korzystając z (24) możemy zapisać $b(Cu) = u \simeq [Cu]$, gdzie \simeq jest izomorfizmem ze Stwierdzenia 10.

Przejdźmy wreszcie do rozszerzenia włożenia $\mathcal{D}'_K \hookrightarrow \mathfrak{B}_K$ do włożenia $\mathcal{D}'(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{B}(\Omega)$, gdzie Ω jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} .

Stwierdzenie 11 ([25, Twierdzenie 4.6]). *Każda dystrybucja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ jest skokiem holomorficznego wzrostu przy osi rzeczywistej (zobacz Definicja 43). Dokładniej mówiąc, jeżeli $L = \text{supp } u$ (L jest domknięty w \mathbb{R} , ale niekoniecznie ograniczony), wówczas istnieje $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L)$ o wielomianowym wzroście przy osi rzeczywistej takie, że dla każdego $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ istnieją granice*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x \pm i\epsilon)\varphi(x) dx$$

oraz $bF = u$, to znaczy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x + i\epsilon) - F(x - i\epsilon))\varphi(x) dx = u[\varphi] \quad \text{dla} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Funkcja F spełniająca powyższy warunek i należąca do $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L)$ jest jednoznaczna z dokładnością do funkcji całkowitej.

Wniosek 3 ([25, Wniosek 4.4]). *Odwzorowanie $\mathcal{J}: \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \ni u \mapsto [F] \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, gdzie F jest funkcją taką, jak w powyższym stwierdzeniu, jest dobrze zdefiniowane, bo F jest jednoznaczna z dokładnością do funkcji całkowitej (stąd $[F]$ też jest jednoznaczna). Odwzorowanie to definiuje naturalne włożenie $\mathcal{D}'_L \hookrightarrow \mathfrak{B}_L$ ($L = \text{supp } u$ jest niekoniecznie ograniczony) zgodne z włożeniem $\mathcal{D}'_K \hookrightarrow \mathfrak{B}_K$ dla zbioru zwartego K .*

Ze Stwierdzenia 7 wynika, że

Wniosek 4. *Hiperfunkcja $[F]$ jest dystrybucją na \mathbb{R} wtedy i tylko wtedy, gdy F ma wielomianowy wzrost przy osi rzeczywistej.*

5.2. Skoki przez linie Stokesa w terminach hiperfunkcji. Rozważmy przestrzeń

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{L}_d) := \mathcal{O}^k(D \cup (S_d \setminus \mathcal{L}_d)) / \mathcal{O}^k(\widehat{S}_d)$$

hiperfunkcji typu Laplace'a o nośniku w zbiorze \mathcal{L}_d ze wzrostem eksponencjalnym rzędu k . To znaczy, że każdą hiperfunkcję $G \in \mathcal{H}^k(\mathcal{L}_d)$ można zapisać jako

$$G(s) = [g(s)]_d = \{g(s) + h(s) : h(s) \in \mathcal{O}^k(\widehat{S}_d)\}$$

dla pewnej funkcji definiującej $g(s) \in \mathcal{O}^k(D \cup (S_d \setminus \mathcal{L}_d))$.

Niech γ_d będzie krzywą złożoną z półprostych idących z $e^{id^-} \infty$ do 0 oraz z 0 do $e^{id^+} \infty$, tzn. $\gamma_d = -\gamma_{d^-} + \gamma_{d^+}$, gdzie $\gamma_{d^\pm} = \mathcal{L}_{d^\pm}$. Ze Stwierdzenia 10 wnioskujemy, że hiperfunkcję $G(s) = [g(s)]_d$ możemy traktować jako analityczny funkcjonal zdefiniowany następująco

$$(25) \quad G(s)[\varphi(s)] := \int_{\gamma_d} g(s)\varphi(s) ds,$$

dla małych $\varphi \in \mathcal{O}^{-k}(\widehat{S}_d)$ takich, że funkcja $s \mapsto g(s)\varphi(s)$ należy do przestrzeni $\mathcal{O}^{-k}(D \cup (S_d \setminus \mathcal{L}_d))$.

Aby opisać skoki za pomocą hiperfunkcji załóżmy najpierw, że $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[t]]$ jest k -sumowalny, m jest funkcją momentów rzędu $1/k$ oraz d jest kierunkiem osobliwym. Na podstawie (7) skok dla \widehat{f} przez linię Stokesa \mathcal{L}_d jest dany wzorem

$$(26) \quad J_{\mathcal{L}_d} \widehat{f}(t) = f^{d^+}(t) - f^{d^-}(t) = (T_{m,d^+} - T_{m,d^-}) \widehat{\mathcal{B}}_m \widehat{f}(t).$$

Zauważmy, że funkcję $g_0(t) := \widehat{\mathcal{B}}_m \widehat{f}(t) \in \mathcal{O}^k(D \cup (S_d \setminus \mathcal{L}_d))$ możemy traktować jako funkcję definiującą hiperfunkcji $G_0(s) := [g_0(s)]_d \in \mathcal{H}^k(\mathcal{L}_d)$. Zatem łącząc (25) z (26) wnioskujemy, że

$$(27) \quad J_{\mathcal{L}_d} \widehat{f}(t) = G_0(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] \text{ dla } t \in S_d \left(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r \right),$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolne oraz $r > 0$ jest dostatecznie małe.

Definicja 50. Zdefiniujmy m -moment operatora Laplace'a $T_{m,d}$ działający na hiperfunkcję $G(s)$ jako $T_{m,d}G(t) := G(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right]$ dla $t \in S_d(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r)$, gdzie $G(s)[\varphi(s)]$ jest zdefiniowany przez (25). Zatem korzystając z (27) możemy opisać skoki w terminach m -moment operatora Laplace'a działającego na hiperfunkcję jako $J_{\mathcal{L}_d}\hat{f}(t) := T_{m,d}G_0(t)$ dla $t \in S_d(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r)$.

Niech teraz $\hat{f} \in \mathbb{C}[[t]]$ będzie \mathbf{k} -multisumowalny oraz \mathbf{d} będzie takie jak w Definicji 37 z \mathcal{L}_{d_j} jako linią Stokesa na poziomie k_j . Dodatkowo, tak jak w Uwadze 12, założmy, że $\hat{f} = \hat{f}_1 + \dots + \hat{f}_n$, gdzie \hat{f}_j jest k_j -sumowalny. Wówczas, z Uwagi 12, skok przez linię Stokesa \mathcal{L}_{d_j} na poziomie k_j dany jest wzorem

$$J_{\mathcal{L}_{d_j}, k_j} \hat{f}(t) = f^{\mathbf{d}_j^+}(t) - f^{\mathbf{d}_j^-}(t) = f_j^{d_j^+}(t) - f_j^{d_j^-}(t) = (T_{m_j, d_j^+} - T_{m_j, d_j^-}) \hat{\mathcal{B}}_{m_j} \hat{f}_j(t),$$

dla $t \in S_{d_j}(\frac{\pi}{k_j} - \varepsilon, r)$. Oczywiście możemy opisać skok w terminach hiperfunkcji tak jak w poprzednim przypadku.

Podobnie, jeśli \mathcal{L}_d jest linią Stokesa dla k -sumowalnego $\hat{u} = \hat{u}(t, z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]$, to jesteśmy w stanie opisać w terminach hiperfunkcji skoki dla $\hat{u}(t, z)$ w punkcie $z \in D$. Mianowicie, mamy, że

$$J_{\mathcal{L}_d} \hat{u}(t, z) = (T_{m,d} F_z)(t) = F_z(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right],$$

gdzie $t \in S_d(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r)$ oraz $F_z(s) = [\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u}(s, z)]_d \in \mathcal{H}^k(\mathcal{L}_d)$. Analogicznie wyliczamy skoki przez linię Stokesa \mathcal{L}_{d_j} poziomu k_j dla \mathbf{k} -multisumowalnego \hat{u} spełniającego $\hat{u} = \hat{u}_1 + \dots + \hat{u}_n$, gdzie \hat{u}_i jest k_i -sumowalny ($i = 1, \dots, n$).

W podrozdziałach 5.3 oraz 5.4 prezentujemy wyniki opublikowane w [26].

5.3. Równanie przewodnictwa cieplnego. Rozważmy ponownie równanie przewodnictwa cieplnego (12), w którym $\varphi(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. W podrozdziale 4.1 zakładaliśmy, że z_0 jest biegunem, natomiast teraz zajmiemy się bardziej ogólnym przypadkiem, a mianowicie z_0 będzie punktem osobliwym lub punktem rozgałęzienia.

Najpierw zauważmy, że zbiór \mathcal{L}_η , gdzie $\eta := 2\theta := 2 \arg z_0$, będzie linią Stokesa dla

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(z) t^n}{n!}.$$

Następnie, łatwo widać, że dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego ustalonego $z \in D_r$ skok będzie miał postać

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right],$$

gdzie $t \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r)$ oraz

$$\begin{aligned} F_z(s) &= \left[\varphi(s+z) + \varphi(z-s) \right]_{\theta_z} \\ &= \left[\varphi(s+z) \right]_{\theta_z} \in \mathcal{O}^2(D \cup (S_\theta(\alpha) \setminus \mathcal{L}_{\theta_z})) / \mathcal{O}^2(D \cup S_\theta(\alpha)) \end{aligned}$$

oraz $\theta_z = \arg(z_0 - z)$.

Uwaga 23. W dalszej części tego podrozdziału zakładamy, że $t \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r)$ oraz ustalamy $z \in D$ ($\varepsilon, r > 0$).

Rozważmy na początek przypadek, w którym z_0 jest jednowartościowym punktem osobliwym funkcji $\varphi(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$

Twierdzenie 9. Załóżmy, że funkcja φ w równaniu (12) ma postać

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n} + \tilde{\varphi}(z),$$

gdzie $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ oraz $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C})$.
Wówczas dla $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$

$$F_z(s) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z+s-z_0)^n} \right]_{\theta_z} = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(z+s-z_0),$$

gdzie δ jest funkcją delta Diraca oraz $\delta^{(n-1)}$ oznacza jej $(n-1)$ pochodną. Ponadto, skok jest szeregiem zbieżnym postaci

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -i \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \Big|_{s=z_0-z}.$$

Dowód. Zauważmy, że skoro $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ jest zbieżny dla każdego $z \neq z_0$. Ponadto, suma tego szeregu jest ograniczona w ∞ . Zatem $\varphi(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$.

Skoro $\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i s} \right]$ (zobacz Przykład 14), to $\delta(x-a) = \left[-\frac{1}{2\pi i (s-a)} \right]$ (gdzie $a \in \mathbb{R}$), to po zróżniczkowaniu n -razy łąco dostajemy, że

$$\delta^{(n)}(x-a) = \left[-\frac{(-1)^n n!}{2\pi i (s-a)^{n+1}} \right] \implies -\frac{2\pi i \delta^{(n-1)}(x-a)}{(-1)^{n-1} (n-1)!} = \left[\frac{1}{(s-a)^n} \right].$$

Nadmieńmy, iż to samo zajdzie dla $a = z_0 - z \in \mathbb{C}$.

Zatem dla $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$

$$F_z(s) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(s+z-z_0)^n} \right]_{\theta_z} = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(s+z-z_0).$$

A stąd

$$\begin{aligned}
J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \\
&= -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(s+z-z_0) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \\
&= -i \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \Big|_{s=z_0-z}.
\end{aligned}$$

Pozostaje nam udowodnienie zbieżności powyższego szeregu.

Zauważmy także, że z Uwagi 6, skoro $s \mapsto e^{-\frac{s^2}{4t}} \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C})$, to istnieją $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$ takie, że dla każdego $t \in S_\theta(\pi - \tilde{\varepsilon}, r)$ oraz $z \in D_r$ (dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ oraz $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$) mamy, że

$$\left| \delta^{(n-1)}(z+s-z_0) \left[e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \right| = \left| \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \Big|_{s=z_0-z} \right| \leq \tilde{A} \tilde{B}^{n-1} ((n-1)!)^{\frac{1}{2}},$$

więc

$$\begin{aligned}
|u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z)| &= \left| -i \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(z+s-z_0) \left[e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \right| \\
&\leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{(n-1)!} \left| \delta^{(n-1)}(z+s-z_0) \left[e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \right| \\
&\leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{(n-1)!} \tilde{A} \tilde{B}^{n-1} ((n-1)!)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \tilde{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| \tilde{B}^{n-1}}{((n-1)!)^{\frac{1}{2}}} < \infty.
\end{aligned}$$

Zatem uzyskujemy żadaną zbieżność szeregu określającego różnicę $J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z)$. \square

W szczególności, z powyższego twierdzenia otrzymujemy poniższe przykłady.

Przykład 18. Załóżmy, że funkcja φ w równaniu (12) ma postać

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{(z-z_0)^n} + \tilde{\varphi}(z),$$

dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gdzie $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ oraz $\tilde{\varphi}(z) \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C})$. Wówczas dla $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$

$$F_z(s) = \left[\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{(z+s-z_0)^n} \right]_{\theta_z} = -2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(z+s-z_0),$$

oraz skok jest postaci

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -i \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=1}^N \frac{a_n (-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \Big|_{s=z_0-z}.$$

Przykład 19. Niech funkcja φ w równaniu (12) będzie określona wzorem

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{z-z_0}} \quad \text{dla pewnego } z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Wówczas dla $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$

$$F_z(s) = \left[e^{\frac{1}{z+s-z_0}} \right]_{\theta_z} = -2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \delta^{(k)}(z+s-z_0),$$

natomiast skok jest postaci

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -i \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \frac{d^k}{ds^k} e^{-\frac{s^2}{4t}} \Big|_{s=z_0-z}.$$

Rozważmy teraz bardziej ogólny przypadek, w którym z_0 może być też punktem rozgałęzienia funkcji $\varphi(z)$.

Definicja 51. Ustalmy $z \in D$. Dla $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$, gdzie $\theta_z = \arg(z_0 - z)$, zdefiniujemy (podobnie jak w [8] oraz [23]) funkcję $\text{var}F_z(s)$ na \mathcal{L}_{θ_z} następująco

$$\text{var}F_z(s) := \begin{cases} 0 & , \text{jeśli } |s| < |z_0 - z| \\ \varphi(z_0 + (s+z-z_0)e^{2\pi i}) - \varphi(s+z) & , \text{jeśli } |s| > |z_0 - z|, \end{cases}$$

oraz zdefiniujemy *funkcję Heaviside'a w kierunku θ_z* jako

$$H_{\theta_z}(xe^{i\theta_z}) := \begin{cases} 1 & , \text{dla } x > 0 \\ 0 & , \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Zatem

$$F_z(s) = \left[\varphi(s+z) \right]_{\theta_z} = -\text{var}F_z(s) = -\text{var}F_z(s)H_{\theta_z}(s+z-z_0).$$

Czyli $J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -\text{var}F_z(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right]$, gdzie ogólnie $-\text{var}F_z(s)$ jest funkcją analityczną na \mathcal{L}_{θ_z} .

Przejdźmy do sformułowania głównego twierdzenia w tym podrozdziale.

Twierdzenie 10. *Przy powyższych założeniach rozważmy następujące przypadki:*

- (1) $\text{var}F_z(s) \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}_{\theta_z})$ jest funkcją analityczną wzrostu eksponencjalnego rzędu co najwyżej 2 dla $|s| > |z_0 - z|$.

Wówczas, dla odpowiednio małych $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że skok ma postać

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = - \int_{z_0-z}^{e^{i\theta_z} \infty} \text{var}F_z(s) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds,$$

dla $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D$.

- (2) $\text{var}F_z(s)$ jest dystrybucją na \mathcal{L}_{θ_z} i jest funkcją analityczną wzrostu eksponencjalnego rzędu co najwyżej 2 dla $|s| > |z_0 - z|$.

Wtedy istnieją $m \in \mathbb{N}$ oraz funkcja $\text{var}\tilde{F}_z(s)$ spełniająca założenia z przypadku (1), takie, że

$$\frac{d^m}{ds^m} \text{var}\tilde{F}_z(s) = \text{var}F_z(s).$$

Ponadto, dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że skok ma postać

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -\text{var}F_z(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \\ &= -\frac{d^m}{ds^m} \text{var}\tilde{F}(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] = -\text{var}\tilde{F}(s) \left[(-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) \right] \\ &= - \int_{z_0-z}^{e^{i\theta_z} \infty} \text{var}\tilde{F}_z(s) (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) ds, \end{aligned}$$

dla $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D$.

- (3) $\text{var}F_z(s)$ jest analitycznym funkcjonalem na \mathcal{L}_{θ_z} .

Wówczas $\text{var}F_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}F_{z,n}(s)$, gdzie $\text{var}F_{z,n}(s)$ spełniają założenia przypadku (2). Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją $k_n \in \mathbb{N}$ oraz funkcje $\text{var}\tilde{F}_{z,n}(s)$ spełniające założenia przypadku (1) takie, że

$$\text{var}F_{z,n}(s) = \frac{d^{k_n}}{ds^{k_n}} \text{var}\tilde{F}_{z,n}(s).$$

Ponadto, dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że skok ma postać

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -\text{var}F_z(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}F_{z,n}(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_0-z}^{e^{i\theta_z} \infty} \text{var}\tilde{F}_{z,n}(s) (-1)^{k_n} \frac{d^{k_n}}{ds^{k_n}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) ds, \end{aligned}$$

dla $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D$.

Dowód. Ad.(1) Najpierw, zauważmy, że dla każdego $z \in D$ funkcja $s \mapsto \text{var}F_z(s)$ jest analityczna na $\mathcal{L}_{\theta_z} \setminus \{z_0 - z\}$, lokalnie całkowalna i ma wzrost eksponencjalny rzędu co najwyżej 2 przy $s \rightarrow \infty$, $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$. Stąd, dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że całka $u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z)$ jest dobrze zdefiniowana dla $(t, z) \in S_\eta(\pi - \varepsilon, r) \times D$.

Dla $z_0 - z = x_0 e^{i\theta_z}$ oraz $s = x e^{i\theta_z}$, gdzie $x_0, x > 0$, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^\infty \varphi\left((x+i\varepsilon)e^{i\theta_z} + z_0 - x_0 e^{i\theta_z}\right) e^{-\frac{1}{4t}\left((x+i\varepsilon)e^{i\theta_z}\right)^2} e^{i\theta_z} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \varphi\left((x-i\varepsilon)e^{i\theta_z} + z_0 - x_0 e^{i\theta_z}\right) e^{-\frac{1}{4t}\left((x-i\varepsilon)e^{i\theta_z}\right)^2} e^{i\theta_z} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4t}(xe^{i\theta_z})^2} e^{i\theta_z} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \varphi\left((x+i\varepsilon-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) \right. \\ &\quad \left. - \varphi\left((x-i\varepsilon-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) \right\} dx = (*) \end{aligned}$$

Zauważmy, że

- dla $x - x_0 > 0$, mamy, że

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \varphi\left((x+i\varepsilon-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) - \varphi\left((x-i\varepsilon-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) \right\} \\ = \varphi\left((x-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) - \varphi\left((x-x_0)e^{i\theta_z} e^{2\pi i} + z_0\right) \end{aligned}$$

- dla $x - x_0 < 0$, mamy, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \varphi\left((x+i\varepsilon-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) - \varphi\left((x-i\varepsilon-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) \right\} = 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{x_0}^\infty \left\{ \varphi\left((x-x_0)e^{i\theta_z} + z_0\right) - \varphi\left((x-x_0)e^{i\theta_z} e^{2\pi i} + z_0\right) \right\} e^{-\frac{(xe^{i\theta_z})^2}{4t}} e^{i\theta_z} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{z_0-z}^{e^{i\theta_z}\infty} \left(\varphi(s+z) - \varphi\left((s+z-z_0)e^{2\pi i} + z_0\right) \right) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \\ &= - \int_{z_0-z}^{e^{i\theta_z}\infty} \text{var}F_z(s) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds. \end{aligned}$$

Ad.(2) Zauważmy, że skoro $\text{var}F_z(s)$ jest ciągła na $\mathcal{L}_{\theta_z} \setminus \{z_0 - z\}$, to ze Stwierdzenia 8, istnieją $m \in \mathbb{N}$ oraz $\text{var}\tilde{F}_z(s) \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}_{\theta_z})$ takie, że

$$\frac{d^m}{ds^m} \text{var}\tilde{F}_z(s) = \text{var}F_z(s).$$

Ponadto, $\text{var}F_z(s)$ ma wzrost eksponencjalny rzędu co najwyżej 2 przy $s \rightarrow \infty, s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$, stąd również $\text{var}\tilde{F}_z(s)$ ma wzrost eksponencjalny rzędu co najwyżej 2 przy $s \rightarrow \infty, s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$. Reszta dowodu przebiega analogicznie do dowodu przypadku (1).

Ad.(3). Ponieważ $\text{var}F_{z,n}(s)$ spełnia założenia przypadku (2), to bazując na wynikach [9], możemy zapisać, że $\text{var}F_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{var}F_{z,n}(s)$, gdzie $\text{var}F_{z,n}(s)$ spełnia założenia przypadku (2). Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją $k_n \in \mathbb{N}$ oraz funkcje $\text{var}\tilde{F}_{z,n}(s)$ spełniające założenia przypadku (1) takie, że $\text{var}F_{z,n}(s) = \frac{d^{k_n}}{ds^{k_n}} \text{var}\tilde{F}_{z,n}(s)$. Reszta dowodu przebiega analogicznie do dowodu przypadku (1). □

Podamy teraz dwa przykłady funkcji $\varphi(z)$ spełniającej przypadek (1) Twierdzenia 10.

Przykład 20. Niech funkcja φ w równaniu (12) będzie określona wzorem $\varphi(z) = \ln(z - z_0)$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas dla $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$

$$\text{var}F_z(s) = 2\pi i H_{\theta_z}(s + z - z_0),$$

natomiast skok jest dany wzorem

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -i \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{z_0 - z}^{e^{i\theta_z} \infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds.$$

Istotnie, dla $|s| > |z_0 - z|$ możemy wyliczyć

$$\begin{aligned} \text{var}F_z(s) &= \varphi\left(z_0 + (s + z - z_0)e^{2\pi i}\right) - \varphi(s + z) = \\ &= \ln\left(z_0 + (s + z - z_0)e^{2\pi i} - z_0\right) - \ln\left((s + z) - z_0\right) = \\ &= \ln\left((s + z - z_0)e^{2\pi i}\right) - \ln(s + z - z_0) = 2\pi i. \end{aligned}$$

Przykład 21. Niech teraz funkcja φ w równaniu (12) będzie określona wzorem $\varphi(z) = (z - z_0)^\lambda$ dla pewnych $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$ oraz $\lambda > -1$. Wtedy dla $s \in \mathcal{L}_{\theta_z}$

$$\text{var}F_z(s) = 2i H_{\theta_z}(z + s - z_0)(-s - z + z_0)^\lambda \sin(\lambda\pi),$$

oraz skok ma postać

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) = u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = -\frac{i}{\sqrt{\pi t}} \int_{z_0-z}^{e^{i\theta_z} \infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} (-s-z+z_0)^\lambda \sin(\lambda\pi) ds.$$

Dokładniej mówiąc, dla $|s| > |z_0 - z|$

$$\begin{aligned} \text{var} F_z(s) &= \varphi(z_0 + (z + s - z_0)e^{2\pi i}) - \varphi(z + s) \\ &= \left((z_0 + (z + s - z_0)e^{2\pi i}) - z_0 \right)^\lambda - \left((z + s) - z_0 \right)^\lambda \\ &= \left((z + s - z_0)e^{2\pi i} \right)^\lambda - (z + s - z_0)^\lambda = (z + s - z_0)^\lambda (e^{2\pi i \lambda} - 1) \\ &= 2i(-1)^\lambda (z + s - z_0)^\lambda \sin(\pi\lambda), \end{aligned}$$

ponieważ

$$\begin{aligned} \sin(\pi\lambda) &= \frac{e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda}}{2i} = \frac{e^{2i\pi\lambda} - 1}{2ie^{i\pi\lambda}} \\ &\implies e^{2i\pi\lambda} - 1 = 2ie^{i\pi\lambda} \sin(\pi\lambda) = 2i(-1)^\lambda \sin(\pi\lambda). \end{aligned}$$

Następnie podamy przykład funkcji $\varphi(z)$ spełniającej przypadek (2) Twierdzenia 10.

Przykład 22. Niech ponownie funkcja φ w równaniu (12) będzie określona wzorem $\varphi(z) = (z - z_0)^\lambda$ dla $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$, ale tym razem $\lambda < -1$. Wówczas dla $m = \lfloor -\lambda \rfloor$ możemy zdefiniować funkcję $\text{var} \tilde{F}_z(s) \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}_{\theta_z})$ jako

$$\text{var} \tilde{F}_z(s) = \frac{2i(-1)^{\lambda+m} \sin(\pi(\lambda+m))}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+m)} (s+z-z_0)^{\lambda+m} H_{\theta_z}(s+z-z_0),$$

zatem

$$\begin{aligned} \text{var} F_z(s) &= \frac{d^m}{ds^m} \text{var} \tilde{F}_z(s) \\ &= \frac{d^m}{ds^m} \left\{ \frac{2i(-1)^{\lambda+m} \sin(\pi(\lambda+m))}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+m)} (s+z-z_0)^{\lambda+m} H_{\theta_z}(s+z-z_0) \right\}, \end{aligned}$$

natomiast skok określony jest jako

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{\pi t}} \int_{z_0-z}^{e^{i\theta_z} \infty} \frac{(-1)^\lambda (s+z-z_0)^{\lambda+m} \sin((\lambda+m)\pi)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+m)} \frac{d^m}{ds^m} \left(e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) ds. \end{aligned}$$

Wreszcie podamy przykład funkcji $\varphi(z)$, która spełnia przypadek (3) Twierdzenia 10.

Przykład 23. Załóżmy, że funkcja φ w równaniu (12) określona jest wzorem $\varphi(z) = e^{\frac{1}{(z-z_0)^\lambda}}$, gdzie $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda \notin \mathbb{Q}$ oraz $\lambda > 0$. Wtedy dla $k_n = \lfloor \lambda n \rfloor$ możemy zdefiniować funkcje $\text{var} F_{z,n}(s) \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}_{\theta_z})$ przez

$$\text{var} \tilde{F}_{z,n}(s) = \frac{2i(-s-z+z_0)^{-\lambda n+k_n} \sin((-\lambda n+k_n)\pi)}{n!(-\lambda n+1)(-\lambda n+2)\dots(-\lambda n+k_n)} H_{\theta_z}(s+z-z_0),$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{var} F_z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{var} F_{z,n}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{k_n}}{ds^{k_n}} \text{var} \tilde{F}_{z,n}(s) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{k_n}}{ds^{k_n}} \frac{2i(-s-z+z_0)^{-\lambda n+k_n} \sin((-\lambda n+k_n)\pi)}{n!(-\lambda n+1)(-\lambda n+2)\dots(-\lambda n+k_n)} \right) H_{\theta_z}(s+z-z_0). \end{aligned}$$

Wówczas skok jest postaci

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = \\ &= - \int_{z_0-z}^{e^{i\theta}z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-s-z+z_0)^{-\lambda n+k_n} \sin((-\lambda n+k_n)\pi)}{\sqrt{\pi t} n!(-\lambda n+1)(-\lambda n+2)\dots(-\lambda n+k_n)} \left[(-1)^{k_n} \frac{d^{k_n}}{ds^{k_n}} \left(e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z Uwagi 6 skoro $s \mapsto e^{-\frac{s^2}{4t}} \in \mathcal{O}^2(\mathbb{C})$, to istnieją stałe $A, B > 0$ takie, że dla każdego $t \in S(\theta, \pi - \tilde{\varepsilon}, r)$ oraz $z \in D_r$ (dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ oraz $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$) mamy, że $\left| (-1)^{k_n} \frac{d^{k_n}}{ds^{k_n}} \left(e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) \right| \leq AB^{\lambda n} (n!)^{\frac{\lambda}{2}}$ oraz

$$\left| \frac{1}{n!(-\lambda n+1)(-\lambda n+2)\dots(-\lambda n+k_n)} \right| \leq \frac{1}{(n!)^{\frac{\lambda}{2}+1}} < \infty,$$

stąd analogicznie do dowodu Twierdzenia 9 otrzymamy zbieżność powyższych szeregów.

5.4. Uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego. Rozważmy ponownie uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego (19) z funkcją $\varphi(z) \in \mathcal{O}^{\frac{q}{q-p}} \left(D \cup \bigcup_{l=0}^{q-1} S_{\frac{dp}{q} + \frac{2\pi l}{q}} \left(\frac{\varepsilon p}{q} \right) \right)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$.

Wówczas z Twierdzenia 7 jednoznaczne rozwiązanie formalne $\hat{u}(t, z)$ rozpatrywanego równania jest $\frac{p}{q-p}$ -sumowalne w kierunku d oraz dla każdego $\psi \in (d - \frac{\varepsilon}{2}, d + \frac{\varepsilon}{2})$ oraz dla każdego $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że jego $\frac{p}{q-p}$ -suma $u \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi(q-p)}{p} - \tilde{\varepsilon}, r) \times D)$ jest dana wzorem (zobacz również

[19, Twierdzenie 6])

(28)

$$u(t, z) = u^\psi(t, z) = \frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_0^{e^{\frac{i\psi p}{q}} \infty} \left(\varphi(z+s) + \cdots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s\right) \right) C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{s}{\sqrt[q]{t^p}}\right) ds.$$

Tak jak w przypadku równania (12), zakładamy, że $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}}(\mathbb{C} \setminus \widetilde{\{z_0\}})$.

Wtedy \mathcal{L}_η , gdzie $\eta := q\theta/p := q \arg z_0/p$ jest linią Stokesa dla \hat{u} .

Ponadto, dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że dla ustalonego $z \in D_r$ i dla $t \in S_\eta\left(\frac{\pi(q-p)}{p} - \varepsilon, r\right)$ skok ma postać

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) \right] \\ &= \left[\varphi(z+s) + \cdots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s\right) \right]_{\theta_z} \left[\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) \right] \\ &= \left[\varphi(z+s) \right]_{\theta_z} \left[\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) \right], \end{aligned}$$

(ostatnia równość wynika z faktu, że w tym przypadku wszystkie punkty osobliwe występują w funkcji $\varphi(z+s)$),

gdzie hiperfunkcja $F_z(s) = \left[\varphi(z+s) + \cdots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s\right) \right]_{\theta_z}$ należy do $\mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}}(D \cup (S_\theta(\alpha) \setminus \mathcal{L}_{\theta_z})) / \mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}}(D \cup S_\theta(\alpha))$, gdzie $\theta_z = \arg(z_0 - z)$.

Zatem otrzymujemy analogiczne rezultaty jak dla równania przewodnictwa cieplnego (12) z tym, że w Twierdzeniu 9 oraz w Twierdzeniu 10 zamieniamy $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}}$ na $\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p})$.

5.5. Równania moment różniczkowe ze stałymi współczynnikami.

W tym podrozdziale będziemy rozważać pewne szczególne przypadki równań moment różniczkowych (dwóch zmiennych zespolonych) ze stałymi współczynnikami, w których dane początkowe są holomorphyjne na płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem skończonej liczby punktów osobliwych lub punktów rozgałęzienia.

Rozpocznijmy od przypomnienia operatorów uogólniających zwyczajnie i ułankowe różniczkowanie, a mianowicie od operatorów moment różniczkowych zdefiniowanych przez Balsera i Yoshino [4], a także przytoczymy operatory moment pseudoróżniczkowe wprowadzone w pracach [17, 18].

Definicja 52. Niech m będzie funkcją momentów. Operator liniowy $\partial_{m,x} : \mathbb{E}[[x]] \rightarrow \mathbb{E}[[x]]$ dany wzorem

$$\partial_{m,x} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{m(j)} x^j \right) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_{j+1}}{m(j)} x^j$$

nazywamy *operatorem m -moment różniczkowym* $\partial_{m,x}$.

Przykład 24. Jeśli $m(u) = \Gamma_1(u)$ to operator $\partial_{m,x}$ pokrywa się ze zwyczajnym różniczkowaniem ∂_x . Ogólnie, jeżeli $s > 0$ oraz $m(u) = \Gamma_s(u)$ to operator $\partial_{m,x}$ spełnia równość $(\partial_{m,x} \hat{u})(x^s) = \partial_x^s(\hat{u}(x^s))$, gdzie ∂_x^s oznacza pochodną ułamkową Caputo rzędu s zdefiniowaną jako

$$\partial_x^s \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{\Gamma_s(j)} x^{sj} \right) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_{j+1}}{\Gamma_s(j)} x^{sj}.$$

Z powyższej definicji otrzymujemy następujący związek między moment transformacją Borela, a moment różniczkowaniem.

Stwierdzenie 12. Niech m oraz m' będą funkcjami momentów. Wówczas operatory $\hat{\mathcal{B}}_{m'}, \partial_{m,t} : \mathbb{E}[[t]] \rightarrow \mathbb{E}[[t]]$ spełniają następujące wzory dla każdego $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ oraz $\bar{m} = mm'$

- 1) $\hat{\mathcal{B}}_{m'} \partial_{m,t} \hat{u} = \partial_{\bar{m},t} \hat{\mathcal{B}}_{m'} \hat{u}$,
- 2) $\hat{\mathcal{B}}_{m'} P(\partial_{m,t}) \hat{u} = P(\partial_{\bar{m},t}) \hat{\mathcal{B}}_{m'} \hat{u}$ dla każdego wielomianu P ze stałymi współczynnikami.

Teraz, wzorując się na [18], uogólnimy operatory moment różniczkowe do pewnego rodzaju operatorów pseudoróżniczkowych.

Definicja 53 ([18, Definition 13]). Niech m będzie funkcją momentów rzędu $1/k > 0$ oraz $\lambda(\zeta)$ będzie funkcją analityczną zmiennej $\xi = \zeta^{1/\gamma}$ dla $|\zeta| \geq r_0$ (dla pewnych $\gamma \in \mathbb{N}$ i $r_0 > 0$) z wielomianowym wzrostem w nieskończoności. Operator moment pseudoróżniczkowy $\lambda(\partial_{m,z}) : \mathcal{O}_{1/\gamma}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{1/\gamma}(D)$ jest zdefiniowany jako

$$\lambda(\partial_{m,z})\varphi(z) := \frac{1}{2\gamma\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon}^{\gamma} \varphi(w) \int_{r_0 e^{i\theta}}^{\infty(\theta)} \lambda(\zeta) E_{\bar{m}}(\zeta^{1/\gamma} z^{1/\gamma}) \frac{e_m(\zeta w)}{\zeta w} d\zeta dw$$

dla każdego $\varphi \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(D_r)$ oraz $|z| < \varepsilon < r$, gdzie $\bar{m}(u) := m(u/\gamma)$, $E_{\bar{m}}(\zeta^{1/\gamma} z^{1/\gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n/\gamma} z^{n/\gamma}}{m(n/\gamma)}$, $\theta \in (-\arg w - \frac{\pi}{2k}, -\arg w + \frac{\pi}{2k})$, a także $\oint_{|w|=\varepsilon}^{\gamma}$ oznacza, że całkujemy γ -razy wzdłuż dodatnio zorientowanego koła o promieniu ε . Natomiast całkowanie wewnętrznej całki przebiega wzdłuż półprostej $\{re^{i\theta} : r \geq r_0\}$.

Definicja 54 ([17, Definition 9]). Niech $\lambda(\zeta)$ będzie funkcją analityczną zmiennej $\xi = \zeta^{1/\gamma}$ dla $|\zeta| \geq r_0$ (dla pewnych $\gamma \in \mathbb{N}$ oraz $r_0 > 0$) z wielomianowym wzrostem w nieskończoności. Wówczas definiujemy *rzęd bieguna*

$q \in \mathbb{Q}$ oraz wyraz wiodący $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkcji $\lambda(\zeta)$ jako liczby spełniające zależność $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \lambda(\zeta)/\zeta^q = \lambda_0$. Wówczas piszemy $\lambda(\zeta) \sim \lambda_0 \zeta^q$.

Przytoczmy jeszcze trzy twierdzenia, które będą nam niezbędne w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 11 ([18, Twierdzenie 1]). *Niech \hat{u} będzie rozwiązaniem formalnym zagadnienia Cauchy'ego postaci*

$$(29) \quad \begin{cases} P(\partial_{m_1,t}, \partial_{m_2,z})u = 0 \\ \partial_{m_1,t}^j u(0, z) = \varphi_j(z) \in \mathcal{O}(D), \quad j = 0, \dots, N-1, \end{cases}$$

gdzie m_1, m_2 funkcjami momentów rzędów odpowiednio $s_1, s_2 > 0$ oraz

$$(30) \quad P(\lambda, \zeta) = P_0(\zeta)\lambda^N - \sum_{j=1}^N P_j(\zeta)\lambda^{N-j}$$

jest wielomianem dwóch zmiennych, którego stopień to N względem λ .

Wówczas $\hat{u} = \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^{N_\alpha} \hat{u}_{\alpha\beta}$, gdzie $\hat{u}_{\alpha\beta}$ jest rozwiązaniem formalnym równania pseudoróżniczkowego

$$\begin{cases} (\partial_{m_1,t} - \lambda_\alpha(\partial_{m_2,z}))^\beta u_{\alpha\beta} = 0 \\ \partial_{m_1,t}^j u_{\alpha\beta}(0, z) = 0 \quad (j = 0, \dots, \beta-2) \\ \partial_{m_1,t}^{\beta-1} \hat{u}_{\alpha\beta}(0, z) = \lambda_\alpha^{\beta-1}(\partial_{m_2,z})\varphi_{\alpha\beta}(z), \end{cases}$$

gdzie $\varphi_{\alpha\beta}(z) := \sum_{j=0}^{N-1} d_{\alpha\beta j}(\partial_{m_2,z})\varphi_j(z) \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(D)$ oraz $d_{\alpha\beta j}(\zeta)$ są pewnymi funkcjami holomorficznymi zmiennej $\xi = \zeta^{1/\gamma}$ i mają wzrost wielomianowy.

Ponadto, jeżeli q_α jest rzędem bieguny funkcji $\lambda_\alpha(\zeta)$ oraz $\bar{q}_\alpha = \max\{0, q_\alpha\}$, to $\hat{u}_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(D)[[t]]_{\bar{q}_\alpha s_2 - s_1}$.

Twierdzenie 12 ([20, Stwierdzenie 5]). *Niech $d \in \mathbb{R}$, $K = (qs_2 - s_1)^{-1}$, $\varepsilon > 0$ oraz $m(u)$ będzie funkcją momentów rzędu $1/K$. Załóżmy także, że $\hat{u}(t, z) \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(D)[[t]]$ jest jednoznacznym rozwiązaniem formalnym równania*

$$(31) \quad \begin{cases} (\partial_{m_1,t} - \lambda(\partial_{m_2,z}))^\beta u = 0 \\ \partial_{m_1,t}^j u(0, z) = 0 \quad (j = 0, \dots, \beta-2) \\ \partial_{m_1,t}^{\beta-1} u(0, z) = \lambda^{\beta-1}(\partial_{m_2,z})\varphi(z) \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(D), \end{cases}$$

gdzie m_1, m_2 są funkcjami momentów rzędu odpowiednio $s_1, s_2 > 0$ i $qs_2 > s_1$, $\gamma \in \mathbb{N}$, $\lambda(\zeta) \sim \lambda_0 \zeta^q$ gdzie $q = \mu/\nu$ dla pewnych względnie pierwszych liczb $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ takich, że $q\gamma \in \mathbb{N}$. Niech

$$(32) \quad \varphi(z) \in \mathcal{O}_{1/\gamma}^{qK} \left(\bigcup_{l=0}^{q\gamma-1} \hat{S}_{(d+\arg \lambda_0+2l\pi)/q}(\varepsilon/q) \right).$$

Wówczas $\hat{u}(t, z)$ jest K -sumowalny w kierunku d oraz dla każdego $\tilde{d} \in (d - \frac{\varepsilon}{2}, d + \frac{\varepsilon}{2})$ i dla każdego $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że jego K -suma $u^{\tilde{d}} \in \mathcal{O}_{1,1/\gamma}(S_{\tilde{d}}(\pi/K - \tilde{\varepsilon}, r) \times D)$ określona jest wzorem

$$(33) \quad u^{\tilde{d}}(t, z) = \mathcal{S}_{K, \tilde{d}} \hat{u}(t, z) = (T_{m, \tilde{d}} v)(t, z) = \int_{e^{i\tilde{d}} \mathbb{R}_+} e_m(s/t) v(s, z) \frac{ds}{s},$$

gdzie $v(t, z) = \hat{\mathcal{B}}_m \hat{u}(t, z)$ ma postać

$$(34) \quad v(t, z) = \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \partial_t^{\beta-1} \frac{1}{2\gamma\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon}^{\gamma} \varphi(w) \int_{r_0 e^{i\theta}}^{\infty e^{i\theta}} E_{\bar{m}_1}(t\lambda(\zeta)) E_{\tilde{m}_2}(\zeta^{1/\gamma} z^{1/\gamma}) \frac{e_{m_2}(\zeta w)}{\zeta w} d\zeta dw$$

gdzie $\bar{m}_1(u) = m_1(u)m(u)$, $\tilde{m}_2(u) = m_2(u/\gamma)$ oraz $\theta \in (-\arg w - \frac{s_2\pi}{2}, -\arg w + \frac{s_2\pi}{2})$.

Dowód. Zauważmy, że z Twierdzenia 11 wynika, że $\hat{u}(t, z) \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(D)[[t]]_{qs_2-s_1}$. Stąd funkcja $v(t, z) := \hat{\mathcal{B}}_m \hat{u}(t, z)$ należy do przestrzeni $\mathcal{O}_{1,1/\gamma}(D^2)$. Ponadto, ze Stwierdzenia 12 otrzymujemy, że funkcja ta spełnia równanie

$$\begin{cases} (\partial_{\bar{m}_1, t} - \lambda(\partial_{m_2, z}))^\beta v = 0 \\ \partial_{\bar{m}_1, t}^j v(0, z) = 0 \quad (j = 0, \dots, \beta - 2) \\ \partial_{\bar{m}_1, t}^{\beta-1} v(0, z) = \lambda^{\beta-1}(\partial_{m_2, z}) \varphi(z) \in \mathcal{O}_{1/\gamma}(D). \end{cases}$$

Używając zaś [18, Lemat 3] dostaniemy całkową reprezentację $v(t, z)$ w postaci wzoru (34).

Natomiast, skoro $\varphi(z)$ spełnia (32), to na podstawie [18, Lemat 4] wnioskujemy, że $v(t, z) \in \mathcal{O}_{1,1/\gamma}^K(\widehat{S}_d(\varepsilon) \times D)$. Zatem dla każdego $\tilde{d} \in (d - \frac{\varepsilon}{2}, d + \frac{\varepsilon}{2})$ funkcja $u^{\tilde{d}}(t, z) := T_{m, \tilde{d}} v(t, z)$ jest dobrze zdefiniowana oraz z definicji funkcji jądrowych (Definicje 21 oraz 22) dla każdego $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ istnieje $r > 0$ takie, że $u^{\tilde{d}} \in \mathcal{O}_{1,1/\gamma}(S_{\tilde{d}}(\pi/K - \tilde{\varepsilon}, r) \times D)$. \square

Twierdzenie 13 ([20, Twierdzenie 2]). *Niech \hat{u} będzie rozwiązaniem formalnym równania (31), gdzie $\varphi \in \mathcal{O}_{1/\gamma}^{qK}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Niech $K := (qs_2 - s_1)^{-1}$, $\eta_l := q \arg z_0 + \frac{2l\pi}{\nu} - \arg \lambda_0$ oraz $u_l := u^{\tilde{d}}$ dla $\tilde{d} \in (\eta_l, \eta_{l+1}) \bmod 2q\pi$ (dla $l = 0, \dots, \mu - 1$ z $\eta_\mu := \eta_0 + 2q\pi$), gdzie $u^{\tilde{d}}$ ma postać (33).*

Wówczas zbiory \mathcal{L}_{η_l} oraz $\mathcal{L}_{\eta_l \pm \frac{\pi}{2K}}$ ($l = 0, \dots, \mu - 1$) są odpowiednio liniami Stokesa i liniami anty-Stokesa dla \hat{u} . Ponadto, skok przez linie Stokesa \mathcal{L}_{η_l} określony jest następująco

$$J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, 0) = u_l(t, 0) - u_{l-1}(t, 0) = u^{\eta_l^+}(t, 0) - u^{\eta_l^-}(t, 0) = F_l(s, 0) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right],$$

przy czym $t \in S_{\eta_l}(\frac{\pi}{K} - \varepsilon, r)$ oraz $F_l(s, 0) \in \mathcal{H}^{qK}(\mathcal{L}_{\eta_l})$ zdefiniowane jest jako $F_l(s, 0) := [v(s, 0)]_{\eta_l}$ oraz $v(s, z) = \hat{\mathcal{B}}_m \hat{u}(s, z)$ ma postać (34).

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $d \neq \eta_l \pmod{2q\pi}$ dla $l = 0, \dots, \mu - 1$ to φ spełnia założenie (32) dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$. Na podstawie Twierdzenia 12 otrzymujemy, że \hat{u} jest K -sumowalny w kierunku $\tilde{d} \in \mathbb{R}$, $\tilde{d} \neq \eta_l \pmod{2q\pi}$ dla $l = 0, \dots, \mu - 1$, a także jego K -suma $u^{\tilde{d}}(t, z)$ spełnia (33).

Zauważmy, że $u^{\tilde{d}}(t, z) = u^{\tilde{d}}(te^{2q\pi i}, z)$ oraz q jest najmniejszą dodatnią liczbą wymierną, dla której ta równość zachodzi. Ponadto, zbiór kierunków osobliwych dla $\hat{u}(t, z)$ modulo $2q\pi$ ma postać $\{\eta_l \pmod{2q\pi} : l = 0, \dots, \mu - 1\}$. Zatem liniami Stokesa dla \hat{u} są zbiory \mathcal{L}_{η_l} oraz liniami anty-Stokesa dla \hat{u} są zbiory $\mathcal{L}_{\eta_l \pm \frac{\pi}{2K}}$.

Obliczmy teraz skok przez linie Stokesa \mathcal{L}_{η_l} .

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta_l^+}(t, z) - u^{\eta_l^-}(t, z) \\ &\stackrel{(33)}{=} \int_{e^{i\eta_l^+} \mathbb{R}_+} e_m(s/t) v(s, z) \frac{ds}{s} - \int_{e^{i\eta_l^-} \mathbb{R}_+} e_m(s/t) v(s, z) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Zatem

$$J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, 0) = F_l(s, 0) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right], \quad \text{dla } t \in S_d \left(\frac{\pi}{K} - \varepsilon, r \right)$$

gdzie $F_l(s, 0) \in \mathcal{H}^{qK}(\mathcal{L}_{\eta_l})$ jest hiperfunkcją na \mathcal{L}_{η_l} zdefiniowaną przez $F_l(s, 0) := [v(s, 0)]_{\eta_l}$. \square

Przejdźmy do rozważania szczególnych przypadków równań moment różniczkowych ze stałymi współczynnikami. Wyliczymy dla nich linie Stokesa oraz wartości skoków.

Przypadek 1. Rozpocznijmy od następującego równania

$$\begin{cases} \partial_{m_1, t}^p u(t, z) = \partial_z^q u(t, z) & \text{gdzie } 0 < ps_1 < q, \\ u(0, z) = \varphi(z), \\ \partial_{m_1, t}^j u(0, z) = 0, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, p-1 \end{cases}$$

gdzie $\varphi(z) \in \mathcal{O}^{\frac{q}{q-ps_1}}(\widetilde{\mathbb{C} \setminus \{z_0\}})$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz m_1 jest funkcją momentów rzędu $s_1 > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_1}(z)$ rzędu $1/s_1$.

Powyższe zagadnienie Cauchy'ego ma jednoznaczne rozwiązanie formalne

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(qn)}(z)}{m_1(pn)} t^{pn},$$

do którego na początek zastosujemy m -moment transformację Borela otrzymując

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{B}}_m \widehat{u})(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(qn)}(z)}{m_1(pn)} \cdot \frac{m_1(pn)}{\Gamma(1 + \frac{q}{p} \cdot pn)} t^{(\frac{p}{q})qn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(qn)}(z)}{(qn)!} t^{(\frac{p}{q})qn} \\ &= \frac{1}{q} \left(\varphi(z + \sqrt[q]{t^p}) + \varphi(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} \sqrt[q]{t^p}) + \cdots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \sqrt[q]{t^p}) \right), \end{aligned}$$

gdzie $m(n) := \frac{\Gamma(1 + \frac{q}{p}n)}{m_1(n)} = \frac{\Gamma_{\frac{q}{p}}(n)}{m_1(n)}$ jest funkcją momentów rzędu $\frac{q}{p} - s_1$ korespondującą z funkcją jądrową $e_m(z)$ rzędu $\frac{p}{q - ps_1}$.

Niech $f(s, z) := (\widehat{\mathcal{B}}_m \widehat{u})(s, z)$, wówczas po użyciu m -moment transformacji Laplace'a w nieosobliwym kierunku d dostaniemy

$$\begin{aligned} (T_{m,d}f)(t, z) &= \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) f(s, z) \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{q} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \left(\varphi(z + \sqrt[q]{s^p}) + \varphi(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} \sqrt[q]{s^p}) + \cdots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \sqrt[q]{s^p}) \right) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Zatem z Twierdzenia 12, jednoznaczne rozwiązanie formalne $\widehat{u}(t, z)$ tego zagadnienia Cauchy'ego jest $\frac{p}{q - ps_1}$ -sumowalne w kierunku d oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że jego $\frac{p}{q - ps_1}$ -suma $u \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi(q - ps_1)}{p} - \varepsilon, r) \times D)$ ma postać

$$\begin{aligned} u(t, z) &= u^d(t, z) \\ &= \frac{1}{q} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \left(\varphi(z + \sqrt[q]{s^p}) + \varphi(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} \sqrt[q]{s^p}) + \cdots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \sqrt[q]{s^p}) \right) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Niech $\theta := \arg z_0$, $\eta := \frac{q\theta}{p}$. Wtedy $\mathcal{L}_{\eta + \frac{2\pi j}{p}}$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$) są liniami Stokesa dla \widehat{u} . Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego ustalonego $z \in D_r$ skok ma postać

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \widehat{u}(t, z) &= u^{\eta^+}(t, z) - u^{\eta^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] \\ &= \left[\varphi(z + \sqrt[q]{s^p}) + \varphi(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} \sqrt[q]{s^p}) + \cdots + \varphi(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \sqrt[q]{s^p}) \right]_{\theta_z} \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] \\ &= \left[\varphi(z + \sqrt[q]{s^p}) \right]_{\theta_z} \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] \end{aligned}$$

gdzie $\theta_z = \arg(z_0 - z)$ oraz $t \in S_\eta(\frac{\pi(q - ps_1)}{p} - \varepsilon, r)$.

Ostatnia równość wynika z faktu, że w tym przypadku wszystkie punkty osobliwe występują w funkcji $s \mapsto \varphi(z + \sqrt[q]{s^p})$.

Zauważmy, że na podstawie [3, Twierdzenie 32] można wyliczyć

$$e_m(u) = T_{m_1, d}^- \left(e_{m_2} \left(1/z \right) \right) (1/u) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(d)} E_{m_1} \left(\frac{1}{uz} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{p}{q}} e^{-\left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{p}{q}}} \frac{dz}{z},$$

gdzie $E_{m_1} \left(\frac{1}{uz} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{uz} \right)^n}{m_1(n)}$, $m_2(n) = \Gamma(1 + \frac{q}{p}n)$ oraz z Przykładu 8 $e_{m_2}(z) = \frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}} e^{-z^{\frac{p}{q}}}$.

Przypadek 2. Zajmijmy się teraz rozwiązaniem formalnym

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m_2, z}^n \varphi(z)}{m_1(n)} t^n$$

równania

$$\begin{cases} \partial_{m_1, t} u(t, z) = \partial_{m_2, z} u(t, z), \\ u(0, z) = \varphi(z) \end{cases}$$

gdzie $\varphi(z) \in \mathcal{O}^{\frac{1}{s_2 - s_1}} \left(\widehat{\mathbb{C} \setminus \{z_0\}} \right)$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz m_1 jest funkcją momentów rzędu $s_1 > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_1}(z)$ rzędu $1/s_1$, m_2 jest funkcją momentów rzędu $s_2 > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_2}(z)$ rzędu $1/s_2$ i $s_2 > s_1$.

Najpierw zastosujemy m -moment transformację Borela do $\hat{u}(t, z)$

$$(\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(t, z) = \hat{\mathcal{B}}_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m_2, z}^n \varphi(z)}{m_1(n)} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m_2, z}^n \varphi(z)}{m_2(n)} t^n,$$

gdzie $m(n) := m_2(n)/m_1(n)$ jest funkcją momentów rzędu $s_2 - s_1$ korespondującą z funkcją jądrową $e_m(z)$ rzędu $k := \frac{1}{s_2 - s_1}$.

Na podstawie [17, Stwierdzenie 3] łatwo widać, że dla $|z| < \varepsilon < r$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\partial_{m_2, z}^n \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} \zeta^n E_{m_2}(z\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw,$$

dla $\psi \in (-\arg w - \frac{\pi s_2}{2}, -\arg w + \frac{\pi s_2}{2})$. Zatem

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m_2, z}^n \varphi(z) t^n}{m_2(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} \frac{\zeta^n t^n}{m_2(n)} E_{m_2}(z\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} E_{m_2}(t\zeta) E_{m_2}(z\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw. \end{aligned}$$

Niech $f(s, z) := (\widehat{\mathcal{B}}_m \widehat{u})(s, z)$, wówczas po użyciu m -moment transformacji Laplace'a w nieosobliwym kierunku d otrzymamy, że

$$\begin{aligned} (T_{m,d}f)(t, z) &= \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) f(s, z) \frac{ds}{s} \\ &= \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} E_{m_2}(s\zeta) E_{m_2}(z\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw \right) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z [3, Twierdzenie 32] funkcja $e_m(u)$ ma postać

$$(35) \quad e_m(u) = T_{m_1,d}^- \left(e_{m_2}(1/z) \right) (1/u) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(d)} E_{m_1} \left(\frac{1}{uz} \right) e_{m_2}(1/z) \frac{dz}{z},$$

gdzie $E_{m_1} \left(\frac{1}{uz} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{uz} \right)^n}{m_1(n)}$.

Zatem z Twierdzenia 12 jednoznaczne rozwiązanie formalne $\widehat{u}(t, z)$ tego zagadnienia Cauchy'ego jest k -sumowalne w kierunku d oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że jego k -suma $u \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r) \times D)$ dana jest wzorem

$$\begin{aligned} u(t, z) &= u^d(t, z) \\ &= \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} E_{m_2}(s\zeta) E_{m_2}(z\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw \right) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Wtedy \mathcal{L}_η , gdzie $\eta = \theta := \arg z_0$, jest linią Stokesa dla \widehat{u} . Dla $z = 0$ skok ma postać

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \widehat{u}(t, 0) &= u^{\eta^+}(t, 0) - u^{\eta^-}(t, 0) = F_0(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} E_{m_2}(s\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right], \end{aligned}$$

dla $t \in S_\eta(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r)$.

Przy użyciu [3, formuła (5.15)] możemy wyliczyć

$$\int_0^{\infty(\psi)} E_{m_2}(s\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta = \frac{1}{w-s},$$

a stąd

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \widehat{u}(t, 0) = \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{\varphi(w)}{w-s} dw \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] = \left[\varphi(s) \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right],$$

przy czym ostatnia równość wynika ze wzoru całkowego Cauchy'ego.

Przypadek 3. Rozważmy teraz następujące równanie

$$\begin{cases} \partial_{m_1,t}^q u(t, z) = \partial_{m_2,z}^q u(t, z), \\ u(0, z) = \varphi(z), \\ \partial_{m_1,t}^j u(0, z) = 0, \text{ dla } j = 1, 2, \dots, q-1 \end{cases}$$

gdzie $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{s_2-s_1}^{\frac{1}{s_2-s_1}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz m_1 jest funkcją momentów rzędu $s_1 > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_1}(z)$ rzędu $1/s_1$, m_2 jest funkcją momentów rzędu $s_2 > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_2}(z)$ rzędu $1/s_2$ i $s_2 > s_1$.

Zauważmy, że skoro

$$\partial_{m_1,t}^q - \partial_{m_2,z}^q = (\partial_{m_1,t} - \partial_{m_2,z})(\partial_{m_1,t} - e^{\frac{2\pi i}{q}} \partial_{m_2,z}) \cdot \dots \cdot (\partial_{m_1,t} - e^{\frac{2\pi i(q-1)}{q}} \partial_{m_2,z}),$$

to

$$\hat{u}(t, z) = \hat{u}_0(t, z) + \hat{u}_1(t, z) + \dots + \hat{u}_{q-1}(t, z),$$

gdzie dla $j = 0, 1, \dots, q-1$

$$\hat{u}_j(t, z) = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m_2,z}^n \varphi(z)}{m_1(n)} \left(e^{\frac{2\pi i j}{q}} \right)^n t^n,$$

jest rozwiązaniem formalnym równania

$$\begin{cases} \partial_{m_1,t} u_j(t, z) = e^{\frac{2\pi i j}{q}} \partial_{m_2,z} u_j(t, z), \\ u_j(0, z) = \frac{1}{q} \varphi(z) \in \mathcal{O}_{s_2-s_1}^{\frac{1}{s_2-s_1}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}). \end{cases}$$

Bazując na rozumowaniu z Przypadku 2 dla każdego $\hat{u}_j(t, z)$ otrzymamy, że

$$u_j(t, z) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} E_{m_2}(se^{\frac{2\pi i j}{q}} \zeta) E_{m_2}(z\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw \right) \frac{ds}{s}.$$

Zatem $\mathcal{L}_{\eta + \frac{2\pi j}{q}}$ są liniami Stokesa dla $\hat{u}(t, z)$, gdzie $\eta = \theta = \arg z_0$ oraz $j = 0, \dots, q-1$. Ponadto

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}_j(t, 0) &= \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{\varphi(w)}{w - se^{\frac{2\pi i j}{q}}} dw \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] = \left[\varphi \left(se^{\frac{2\pi i j}{q}} \right) \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] \\ &= \begin{cases} \left[\varphi(s) \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right], & \text{dla } j = 0 \\ 0, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, q-1, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie funkcja e_m dana jest wzorem (35). Stąd

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \hat{u}(t, 0) = \left[\sum_{j=0}^{q-1} \varphi \left(se^{\frac{2\pi i j}{q}} \right) \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] = \left[\varphi(s) \right]_{\theta} \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right],$$

dla $t \in S_\eta(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r)$, gdzie $k = \frac{1}{s_2 - s_1}$ oraz $\varepsilon > 0$ jest dowolne, natomiast $r > 0$ jest dostatecznie małe.

Przypadek 4. Przejdźmy teraz do bardziej ogólnego równania tzn.

$$(36) \quad \begin{cases} \partial_{m_1, t}^p u(t, z) = \partial_{m_2, z}^q u(t, z), & \text{gdzie } 0 < ps_1 < qs_2, \\ u(0, z) = \varphi(z), \\ \partial_{m_1, t}^j u(0, z) = 0, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, p-1 \end{cases}$$

gdzie $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{qs_2 - ps_1}^{\frac{q}{q}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz m_1 jest funkcją momentów rzędu $s_1 > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_1}(z)$ rzędu $1/s_1$, m_2 jest funkcją momentów rzędu $s_2 > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_2}(z)$ rzędu $1/s_2$.

Powyższe zagadnienie Cauchy'ego ma rozwiązanie formalne postaci

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m_2, z}^{qn} \varphi(z)}{m_1(pn)} t^{pn}.$$

Z Twierdzenia 13 wynika, że $\mathcal{L}_{\eta + \frac{2\pi j}{p}}$ są liniami Stokesa dla $\hat{u}(t, z)$, gdzie $\eta = \frac{q}{p}\theta$, $\theta := \arg z_0$ oraz $j = 0, \dots, p-1$. Aby wyznaczyć skoki przez te linie Stokesa przyjmijmy, że $v(t, z) := u(t^{\frac{q}{p}}, z)$ oraz $\tilde{m}_1(n) := m_1(\frac{pn}{q})$ jest funkcją momentów rzędu $\frac{s_1 p}{q} > 0$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{\tilde{m}_1}(z) = \frac{q}{p} e_{m_1}(z^{\frac{q}{p}})$ rzędu $\frac{q}{s_1 p}$. Wtedy

$$\hat{v}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m_2, z}^{qn} \varphi(z)}{\tilde{m}_1(qn)} t^{qn}$$

jest rozwiązaniem formalnym równania

$$(37) \quad \begin{cases} \partial_{\tilde{m}_1, t}^q v(t, z) = \partial_{m_2, z}^q v(t, z), \\ v(0, z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}_{qs_2 - ps_1}^{\frac{q}{q}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}), \\ \partial_{\tilde{m}_1, t}^j v(0, z) = 0, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, q-1. \end{cases}$$

Zauważmy, że $\hat{u}(t, z)$ jest rozwiązaniem formalnym równania (36) wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{v}(t, z)$ jest rozwiązaniem formalnym równania (37) (zobacz także [17, Lemat 3]).

W tym przypadku redukujemy nasz problem do tego, który rozważaliśmy w Przypadku 3 – zatem na podstawie otrzymanych wyników, mamy, że

$$v_j(t, z) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \varphi(w) \int_0^{\infty(\psi)} E_{m_2}(se^{\frac{2\pi ij}{q}} \zeta) E_{m_2}(z\zeta) \frac{e_{m_2}(w\zeta)}{w\zeta} d\zeta dw \right) \frac{ds}{s},$$

więc

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_\theta} \widehat{v}_j(t, 0) &= \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon} \frac{\varphi(w)}{w - se^{\frac{2\pi i j}{q}}} dw \right]_\theta \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] = \left[\varphi \left(se^{\frac{2\pi i j}{q}} \right) \right]_\theta \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] \\ &= \begin{cases} \left[\varphi(s) \right]_\theta \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right], & \text{dla } j = 0 \\ 0, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, q-1, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie e_m ma postać

$$e_m(u) = T_{\tilde{m}_1, d}^- \left(e_{m_2}(1/z) \right) (1/u) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(d)} E_{\tilde{m}_1} \left(\frac{1}{uz} \right) e_{m_2}(1/z) \frac{dz}{z},$$

przy czym

$$E_{\tilde{m}_1} \left(\frac{1}{uz} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{uz} \right)^n}{\tilde{m}_1(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{uz} \right)^n}{m_1\left(\frac{pn}{q}\right)}.$$

Zatem

$$J_{\mathcal{L}_\theta} \widehat{v}(t, 0) = \left[\sum_{j=0}^{q-1} \varphi \left(se^{\frac{2\pi i j}{q}} \right) \right]_\theta \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right] = \left[\varphi(s) \right]_\theta \left[\frac{e_m(s/t)}{qs} \right],$$

dla $t \in S_\theta \left(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r \right)$, gdzie $k = \frac{q}{qs_2 - ps_1}$ oraz $\varepsilon > 0$ jest dowolne, natomiast $r > 0$ jest dostatecznie małe.

Stąd

$$J_{\mathcal{L}_\eta} \widehat{u}(t, 0) = J_{\mathcal{L}_\theta} \widehat{v}(t^{\frac{p}{q}}, 0) = \left[\varphi(s) \right]_\theta \left[\frac{e_m(s/t^{\frac{p}{q}})}{qs} \right], \quad \text{dla } t \in S_\eta \left(\frac{q\pi}{pk} - \varepsilon, r \right).$$

5.6. Równania różniczkowe ze zmiennymi współczynnikami. W tym podrozdziale przedstawimy wyniki opublikowane w [27], a mianowicie zbadamy zjawisko Stokesa dla pewnych równań różniczkowych cząstkowych ze zmiennymi współczynnikami, w których dane początkowe są holomorfczne.

Rozważmy następujące równanie

$$(38) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, z) = a(\partial_t t)^p t^q \partial_z^r u(t, z), & \text{with } p, q, r \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{C} \\ u(0, z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D). \end{cases}$$

Powyższe zagadnienie Cauchy'ego ma jednoznaczne rozwiązanie formalne

$$\widehat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi^{(nr)}(z) t^{n(q+1)}.$$

Zajmijmy się przypadkami, gdy $r = 0$ oraz $r > 0$.

Przypadek 1. Niech $r = 0$ oraz $m_1(n) = \Gamma\left(1 + \frac{n}{q+1}\right)$ będzie funkcją momentów rzędu $\frac{1}{q+1}$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_1}(z)$ rzędu $q+1$.

(a) Załóżmy, że $p = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n (n!)^{-1} (q+1)^{-n} \varphi(z) t^{n(q+1)} \\ &= \varphi(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a(q+1)^{-1} t^{q+1})^n}{n!} = \varphi(z) e^{\frac{at^{q+1}}{q+1}}\end{aligned}$$

jest funkcją całkowitą zmiennej t . Zatem nie istnieją kierunki osobiwe.

(b) Załóżmy, że $p = 1$. Wówczas

$$\widehat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi(z) t^{n(q+1)} = \frac{\varphi(z)}{1 - at^{q+1}}, \quad \text{o ile } |at^{q+1}| < 1$$

jest funkcją analityczną dla $|t| < |a|^{-\frac{1}{q+1}}$, a więc nie istnieją kierunki osobiwe.

(c) Niech teraz $p \geq 2$. Ze Stwierdzenia 6 wynika, że funkcja

$$m(n) := \underbrace{m_1(n) \cdot \dots \cdot m_1(n)}_{(p-1)\text{-razy}} = \left(\Gamma\left(1 + \frac{n}{q+1}\right) \right)^{p-1}$$

jest funkcją momentów rzędu $\frac{p-1}{q+1}$ korespondującą z funkcją jądrową $e_m(z)$ rzędu $\frac{q+1}{p-1}$.

Rozpocznijmy od zastosowania m -moment transformacji Borela do $\widehat{u}(t, z)$.

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathcal{B}}_m \widehat{u})(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi(z)}{m(n(q+1))} t^{n(q+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi(z)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{n(q+1)}{q+1}\right) \right)^{p-1}} t^{n(q+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi(z)}{\left(\Gamma(1+n) \right)^{p-1}} t^{n(q+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi(z)}{(n!)^{p-1}} t^{n(q+1)} = \frac{\varphi(z)}{1 - a(q+1)^{p-1} t^{q+1}},\end{aligned}$$

jeśli $|a(q+1)^{p-1} t^{q+1}| < 1$.

Niech $f(s, z) := (\widehat{\mathcal{B}}_m \widehat{u})(s, z)$, wówczas stosując m -moment transformację Laplace'a w nieosobliwym kierunku d otrzymamy, że

$$(T_{m,d} f)(t, z) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m\left(\frac{s}{t}\right) f(s, z) \frac{ds}{s} = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m\left(\frac{s}{t}\right) \frac{\varphi(z)}{1 - a(q+1)^{p-1} s^{q+1}} \frac{ds}{s}.$$

Zatem jeśli $d \neq \frac{2k\pi - \arg a}{q+1}$ dla $k \in \mathbb{Z}$, to jednoznaczne rozwiązanie formalne $\hat{u}(t, z)$ równania (38) jest $\frac{q+1}{p-1}$ -sumowalne w kierunku d oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że jego $\frac{q+1}{p-1}$ -suma $u(t, z) \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi(p-1)}{q+1} - \varepsilon, \tilde{r}) \times D)$ ma postać

$$u(t, z) = u^d(t, z) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m\left(\frac{s}{t}\right) \frac{\varphi(z)}{1 - a(q+1)^{p-1} s^{q+1}} \frac{ds}{s}.$$

Niech $d_k := \frac{2k\pi - \arg a}{q+1}$ dla $k = 0, \dots, q$. Wtedy \mathcal{L}_{d_k} są liniami Stokesa dla \hat{u} , natomiast skok jest dany przez

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_{d_k}} \hat{u}(t, z) &= u^{d_k^+}(t, z) - u^{d_k^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] = [\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u}(s, z)] \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] \\ &= \left[\frac{\varphi(z)}{1 - a(q+1)^{p-1} s^{q+1}} \right]_{d_k} \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] = \\ &= \left[\frac{\varphi(z)}{\left(1 - a^{\frac{1}{q+1}}(q+1)^{\frac{p-1}{q+1}} s\right) \cdots \left(1 - a^{\frac{1}{q+1}}(q+1)^{\frac{p-1}{q+1}} e^{\frac{2\pi i q}{q+1}} s\right)} \right]_{d_k} \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] \\ &= 2\pi i \frac{\varphi(z)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^q \left(1 - a^{\frac{1}{q+1}}(q+1)^{\frac{p-1}{q+1}} e^{\frac{2\pi i j}{q+1}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}}\right)} \times \\ &\quad \frac{e_m\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}} t^{-1}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}}} \\ &= 2\pi i \frac{\varphi(z)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^q \left(1 - (e^{2\pi i})^{\frac{j-k}{q+1}}\right)} \frac{e_m\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}} t^{-1}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}}} \\ &= 2\pi i \frac{\varphi(z)}{q+1} \frac{e_m\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}} t^{-1}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}}}, \end{aligned}$$

dla $t \in S_{d_k}(\frac{\pi(p-1)}{q+1} - \bar{\varepsilon}, \bar{r})$, gdzie $\bar{\varepsilon} > 0$ jest dowolne, natomiast $\bar{r} > 0$ jest dostatecznie małe.

Zauważmy, że z [3, Twierdzenie 31] wynika, że możemy wyliczyć funkcję $e_m(z)$ indukcyjnie ze względu na p , czyli

- Niech $p = 2$, wówczas $m^0 := m(n) = m_1(n)$ oraz

$$e_{m^0}(z) = e_{m_1}(z) \stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} (q+1)z^{q+1}e^{-z^{q+1}}.$$

- Niech $p = 3$, wówczas $m^1(n) := m(n) = m_1(n)m^0(n)$ oraz

$$e_{m^1}(z) = T_{m_1,d} \left(e_{m^0} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \left(\frac{1}{z} \right) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_{m_1}(uz) e_{m^0} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}$$

$$\stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} (q+1)(uz)^{q+1} e^{-(uz)^{q+1}} (q+1) \left(\frac{1}{u} \right)^{q+1} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)^{q+1}} \frac{du}{u}$$

$$= \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} (q+1)^2 z^{q+1} e^{-(uz)^{q+1}} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)^{q+1}} \frac{du}{u}.$$

- Niech $p = 4$, wówczas $m^2(n) := m(n) = m_1(n)m^1(n)$ oraz

$$e_{m^2}(z) = T_{m_1,d} \left(e_{m^1} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \left(\frac{1}{z} \right) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_{m_1}(uz) e_{m^1} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}$$

$$\stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} (q+1)(uz)^{q+1} e^{-(uz)^{q+1}} e_{m^1} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}.$$

- Zatem, ogólnie, jeżeli $p \geq 3$, to $m^{p-2}(n) := m(n) = m_1(n)m^{p-3}(n)$ oraz

$$e_{m^{p-2}}(z) = T_{m_1,d} \left(e_{m^{p-3}} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \left(\frac{1}{z} \right) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_{m_1}(uz) e_{m^{p-3}} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}$$

$$\stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} (q+1)(uz)^{q+1} e^{-(uz)^{q+1}} e_{m^{p-3}} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}.$$

Przypadek 2. Przyjmijmy teraz, że $r > 0$ oraz niech $m_1(n) = \Gamma\left(1 + \frac{n}{q+1}\right)$ będzie funkcją momentów rzędu $\frac{1}{q+1}$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_1}(z)$ rzędu $q+1$, natomiast niech $m_2(n) = \Gamma\left(1 + \frac{nr}{q+1}\right)$ będzie funkcją momentów $\frac{r}{q+1}$ korespondującą z funkcją jądrową $e_{m_2}(z)$ rzędu $\frac{q+1}{r}$.

- (a) Niech $r = 1$ oraz $p = 0$. Wówczas funkcja

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (n!)^{-1} (q+1)^{-n} \varphi^{(n)}(z) t^{n(q+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a(q+1)^{-1} t^{q+1})^n \varphi^{(n)}(z)}{n!} = \varphi \left(z + \frac{at^{q+1}}{q+1} \right)$$

dla dostatecznie małych z oraz t jest funkcją analityczną, a zatem nie istnieją kierunki osobliwe.

- (b) Niech $r > 1$, $p = 0$ oraz $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\frac{r}{r-1}} \left(\mathbb{C} \setminus \widetilde{\{z_0\}} \right)$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas ze Stwierdzenia 5 funkcja $m(n) := \frac{m_2(n)}{m_1(n)} =$

$\frac{\Gamma\left(1+\frac{nr}{q+1}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{q+1}\right)}$ jest funkcją momentów rzędu $\frac{r-1}{q+1}$ korespondującą z funkcją jądrową $e_m(z)$ rzędu $\frac{q+1}{r-1}$.

Rozpocznijmy od zastosowania m -moment transformacji Borela do $\hat{u}(t, z)$.

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{-1} (q+1)^{-n} \varphi^{(nr)}(z)}{m(n(q+1))} t^{n(q+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{-1} (q+1)^{-n} \varphi^{(nr)}(z)}{\Gamma\left(1+\frac{n(q+1)r}{q+1}\right) \left(\Gamma\left(1+\frac{n(q+1)}{q+1}\right)\right)^{-1}} t^{n(q+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{-1} (q+1)^{-n} \varphi^{(nr)}(z)}{\Gamma(1+nr) \left(\Gamma(1+n)\right)^{-1}} t^{n(q+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{-1} (q+1)^{-n} \varphi^{(nr)}(z)}{(nr)!(n!)^{-1}} t^{n(q+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{-\frac{1}{r}} t^{\frac{q+1}{r}}\right)^{nr} \varphi^{(nr)}(z)}{(nr)!} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi j}{r}i} a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{-\frac{1}{r}} t^{\frac{q+1}{r}}\right). \end{aligned}$$

Niech $f(s, z) := (\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(s, z)$, następnie stosując m -moment transformację Laplace'a w nieosobliwym kierunku d otrzymamy, że

$$\begin{aligned} (T_{m,d}f)(t, z) &= \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m\left(\frac{s}{t}\right) f(s, z) \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{r} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m\left(\frac{s}{t}\right) \sum_{j=0}^{r-1} \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi j}{r}i} a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{-\frac{1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}}\right) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Zatem jednoznaczne rozwiązanie formalne $\hat{u}(t, z)$ równania (38) jest $\frac{q+1}{r-1}$ -sumowalne w kierunku d oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że jego $\frac{q+1}{r-1}$ -suma $u \in \mathcal{O}(S_d(\pi^{\frac{r-1}{q+1}} - \varepsilon, \tilde{r}) \times D)$ określona jest wzorem

$$u(t, z) = u^d(t, z) = \frac{1}{r} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m\left(\frac{s}{t}\right) \sum_{j=0}^{r-1} \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi j}{r}i} a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{-\frac{1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}}\right) \frac{ds}{s}.$$

Niech $\theta_z := \arg(z_0 - z)$, $\eta_l := \frac{r\theta_z - 2\pi l - \arg a}{q+1}$, gdzie $l = 0, 1, \dots, r-1$. Wówczas \mathcal{L}_{η_l} są liniami Stokesa dla \hat{u} . Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$

istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego ustalonego $z \in D_r$ skok ma postać

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{L}_{\eta_i}} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta_i^+}(t, z) - u^{\eta_i^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] = [\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u}(s, z)] \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{r-1} \varphi \left(z + e^{\frac{2\pi j}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{-\frac{1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right) \right]_{\eta_i} \left[\frac{e_m(s/t)}{rs} \right] \\ &= \left[\varphi \left(z + e^{\frac{2\pi l}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{-\frac{1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right) \right]_{\eta_i} \left[\frac{e_m(s/t)}{rs} \right], \end{aligned}$$

dla $t \in S_{\eta_i}(\frac{\pi(r-1)}{q+1} - \bar{\varepsilon}, \bar{r})$, gdzie $\bar{\varepsilon} > 0$ jest dowolne, natomiast $\bar{r} > 0$ jest dostatecznie małe.

Ostatnia równość wynika z faktu, że w tym konkretnym przypadku wszystkie punkty osobliwe pojawiają się w funkcji $s \mapsto \varphi \left(z + e^{\frac{2\pi l}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{-\frac{1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right)$.

Ponadto, zauważmy, że z [3, Twierdzenia 32] możemy wyliczyć funkcję

$$\begin{aligned} e_m(u) &= T_{m_1, d}^- \left(e_{m_2} \left(\frac{1}{z} \right) \right) \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(d)} E_{m_1} \left(\frac{1}{uz} \right) e_{m_2} \left(\frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z} \\ &\stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(d)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(uz)^{-v}}{m_1(v)} \frac{q+1}{r} \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{q+1}{r}} e^{-\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{q+1}{r}}} \frac{dz}{z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(d)} \mathbf{E}_{\frac{1}{q+1}} \left(\frac{1}{uz} \right) \frac{q+1}{r} \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{q+1}{r}} e^{-\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{q+1}{r}}} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

- (c) Niech teraz $r > 1, p \neq 0$ oraz $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\frac{r}{p-1+r}}(\widetilde{\mathbb{C} \setminus \{z_0\}})$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas ze Stwierdzenia 5 funkcja $m(n) := m_2(n) \cdot \underbrace{m_1(n) \cdot \dots \cdot m_1(n)}_{(p-1)\text{-razy}} = \Gamma\left(1 + \frac{nr}{q+1}\right) \left(\Gamma\left(1 + \frac{n}{q+1}\right)\right)^{p-1}$ jest funkcją momentów rzędu $\frac{p-1+r}{q+1}$ korespondującą z funkcją jądrową $e_m(z)$ rzędu $\frac{q+1}{p-1+r}$.

Zastosujmy najpierw m -moment transformację Borela do $\hat{u}(t, z)$.

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi^{(nr)}(z)}{m(n(q+1))} t^{n(q+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi^{(nr)}(z)}{\Gamma\left(1 + \frac{n(q+1)r}{q+1}\right) \left(\Gamma\left(1 + \frac{n(q+1)}{q+1}\right)\right)^{p-1}} t^{n(q+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi^{(nr)}(z)}{\Gamma(1 + nr) \left(\Gamma(1 + n)\right)^{p-1}} t^{n(q+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (n!)^{p-1} (q+1)^{n(p-1)} \varphi^{(nr)}(z)}{(nr)!(n!)^{p-1}} t^{n(q+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{\frac{p-1}{r}} t^{\frac{q+1}{r}}\right)^{nr} \varphi^{(nr)}(z)}{(nr)!} \\
&= \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi j}{r}i} a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{\frac{p-1}{r}} t^{\frac{q+1}{r}}\right).
\end{aligned}$$

Niech $f(s, z) := (\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(s, z)$, następnie stosując m -moment transformację Laplace'a w nieosobliwym kierunku d otrzymamy, że

$$\begin{aligned}
(T_{m,d}f)(t, z) &= \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) f(s, z) \frac{ds}{s} \\
&= \frac{1}{r} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \sum_{j=0}^{r-1} \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi j}{r}i} a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{\frac{p-1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}}\right) \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Zatem jednoznaczne rozwiązanie formalne $\hat{u}(t, z)$ równania (38) jest $\frac{q+1}{p-1+r}$ -sumowalne w kierunku d oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że jego $\frac{q+1}{p-1+r}$ -suma $u(t, z) \in \mathcal{O}(S_d(\pi^{\frac{p-1+r}{q+1}} - \varepsilon, \tilde{r}) \times D)$ ma postać

$$u(t, z) = u^d(t, z) = \frac{1}{r} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \sum_{j=0}^{r-1} \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi j}{r}i} a^{\frac{1}{r}}(q+1)^{\frac{p-1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}}\right) \frac{ds}{s}.$$

Niech $\theta_z := \arg(z_0 - z)$, $\eta_l := \frac{r\theta_z - 2\pi l - \arg a}{q+1}$, gdzie $l = 0, 1, \dots, r-1$. Wówczas \mathcal{L}_{η_l} są liniami Stokesa dla \hat{u} . Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że dla każdego ustalonego $z \in D_{\tilde{r}}$ skok opisany

jest jako

$$\begin{aligned}
J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, z) &= u^{\eta_l^+}(t, z) - u^{\eta_l^-}(t, z) = F_z(s) \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] = [\hat{\mathcal{B}}_m \hat{u}(s, z)] \left[\frac{e_m(s/t)}{s} \right] \\
&= \left[\sum_{j=0}^{r-1} \varphi \left(z + e^{\frac{2\pi j}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{\frac{p-1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right) \right]_{\eta_l} \left[\frac{e_m(s/t)}{rs} \right] \\
&= \left[\varphi \left(z + e^{\frac{2\pi l}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{\frac{p-1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right) \right]_{\eta_l} \left[\frac{e_m(s/t)}{rs} \right],
\end{aligned}$$

dla $t \in S_{\eta_l}(\pi \frac{p-1+r}{q+1} - \bar{\varepsilon}, \bar{r})$, gdzie $\bar{\varepsilon} > 0$ jest dowolne, natomiast $\bar{r} > 0$ jest dostatecznie małe.

Podobnie jak w Przypadku 1, ostatnia równość wynika z faktu, że wszystkie kierunki osobliwe występują w funkcji $s \mapsto \varphi \left(z + e^{\frac{2\pi l}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{\frac{p-1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right)$.

Zauważmy, że z [3, Twierdzenia 31] możemy wyliczyć funkcję $e_m(z)$ przez indukcję ze względu na p , a mianowicie

- Niech $p = 1$, wtedy $m^0 := m(n) = m_2(n)$ oraz

$$e_{m^0}(z) = e_{m_2}(z) \stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} \frac{q+1}{r} z^{\frac{q+1}{r}} e^{-z^{\frac{q+1}{r}}}.$$

- Niech $p = 2$, wtedy $m^1(n) := m(n) = m^0(n)m_1(n)$ oraz

$$\begin{aligned}
e_{m^1}(z) &= T_{m_1, d} \left(e_{m^0} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \left(\frac{1}{z} \right) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_{m_1}(uz) e_{m^0} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u} \\
&\stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} (q+1)(uz)^{q+1} e^{-(uz)^{q+1}} \frac{q+1}{r} \left(\frac{1}{u} \right)^{\frac{q+1}{r}} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{q+1}{r}}} \frac{du}{u}.
\end{aligned}$$

- Niech $p = 3$, wtedy $m^2(n) := m(n) = m^1(n)m_1(n)$ oraz

$$\begin{aligned}
e_{m^2}(z) &= T_{m_1, d} \left(e_{m^1} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \left(\frac{1}{z} \right) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_{m_1}(uz) e_{m^1} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u} \\
&\stackrel{\text{z Przykładu 8}}{=} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} (q+1)(uz)^{q+1} e^{-(uz)^{q+1}} e_{m^1} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}.
\end{aligned}$$

- Stąd, w ogólności, jeżeli $p \geq 2$, to $m^{\mathbf{p}-1}(n) := m(n) = m^{\mathbf{p}-2}(n)m_1(n)$ oraz

$$e_{m^{\mathbf{p}-1}}(z) = T_{m_1, d} \left(e_{m^{\mathbf{p}-2}} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \left(\frac{1}{z} \right) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_{m_1}(uz) e_{m^{\mathbf{p}-2}} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}$$

z Przykładu 8 $\stackrel{=}{=} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} (q+1)(uz)^{q+1} e^{-(uz)^{q+1}} e_{m^{\mathbf{p}-2}} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{u}.$

Podsumowując otrzymane w powyższych przypadkach wyniki, możemy sformułować następujące twierdzenia:

Twierdzenie 14. Niech $d \neq \frac{2k\pi - \arg a}{q+1}$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Załóżmy, że $\hat{u}(t, z)$ jest jednoznacznym rozwiązaniem formalnym równania (38), gdzie $r = 0$ oraz $p \geq 2$. Wówczas $\hat{u}(t, z)$ jest $\frac{q+1}{p-1}$ -sumowalny w kierunku d oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że jego $\frac{q+1}{p-1}$ -suma $u(t, z) \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi(p-1)}{q+1} - \varepsilon, \tilde{r}) \times D)$ dana jest wzorem

$$u(t, z) = u^d(t, z) = (T_{m, d} \hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(t, z) = \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m \left(\frac{s}{t} \right) \frac{\varphi(z)}{1 - a(q+1)^{p-1} s^{q+1}} \frac{ds}{s}.$$

Ponadto, jeśli $d_k := \frac{2k\pi - \arg a}{q+1}$ dla $k = 0, \dots, q$, to \mathcal{L}_{d_k} są liniami Stokesa dla \hat{u} oraz skok ma postać

$$J_{\mathcal{L}_{d_k}} \hat{u}(t, z) = 2\pi i \frac{\varphi(z)}{q+1} \frac{e_m \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}} t^{-1} \right)}{\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{q+1}} (q+1)^{-\frac{p-1}{q+1}} e^{-\frac{2\pi i k}{q+1}}},$$

dla $t \in S_{d_k}(\frac{\pi(p-1)}{q+1} - \bar{\varepsilon}, \bar{r})$, gdzie $\bar{\varepsilon} > 0$ jest dowolne, natomiast $\bar{r} > 0$ jest dostatecznie małe.

Twierdzenie 15. Niech $\hat{u}(t, z)$ będzie jednoznacznym rozwiązaniem formalnym równania (38), w którym $p \geq 0$, $r > 1$ oraz $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\frac{r}{p-1+r}}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas $\hat{u}(t, z)$ jest $\frac{q+1}{p-1+r}$ -sumowalny w kierunku d oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że jego $\frac{q+1}{p-1+r}$ -suma $u \in \mathcal{O}(S_d(\frac{\pi(p-1+r)}{q+1} - \varepsilon, \tilde{r}) \times D)$ dana jest wzorem

$$u(t, z) = u^d(t, z) = (T_{m, d} \hat{\mathcal{B}}_m \hat{u})(t, z) = \frac{1}{r} \int_{e^{id}\mathbb{R}_+} e_m(s/t) \sum_{j=0}^{r-1} \varphi \left(z + e^{\frac{2\pi j}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{\frac{p-1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right) \frac{ds}{s}.$$

Ponadto, jeśli $\theta_z := \arg(z_0 - z)$, $\eta_l := \frac{r\theta_z - 2\pi l - \arg a}{q+1}$, gdzie $l = 0, 1, \dots, r-1$, to \mathcal{L}_{η_l} są liniami Stokesa dla $\hat{u}(t, z)$ oraz dla każdego dostatecznie małego

$\varepsilon > 0$ istnieje $\tilde{r} > 0$ takie, że dla każdego ustalonego $z \in D_{\tilde{r}}$ skok ma postać

$$J_{\mathcal{L}_{\eta_l}} \hat{u}(t, z) = \left[\varphi \left(z + e^{\frac{2\pi l}{r} i} a^{\frac{1}{r}} (q+1)^{\frac{p-1}{r}} s^{\frac{q+1}{r}} \right) \right]_{\eta_l} \left[\frac{e_m(s/t)}{rs} \right],$$

dla $t \in S_{\eta_l}(\pi^{\frac{p-1+r}{q+1}} - \bar{\varepsilon}, \bar{r})$, gdzie $\bar{\varepsilon} > 0$ jest dowolne, natomiast $\bar{r} > 0$ jest dostatecznie małe.

6. ZJAWISKO STOKESA W TERMINACH FUNKCJI RESURGENTNYCH

W tym rozdziale pokażemy (różne od poprzednich) podejście do zjawiska Stokesa przy użyciu funkcji resurgentnych. Będzie opierać się na książce [21].

Definicja 55. Niech Ω będzie niepustym, domkniętym, dyskretnym podzbiorem zbioru \mathbb{C} , niech $\hat{\varphi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ będzie holomorficznym kielkiem w zerze. Powiemy, że $\hat{\varphi}$ jest Ω -przedłużalnym kielkiem, jeśli istnieje $r > 0$ nie większe od promienia zbieżności szeregu $\hat{\varphi}$ takie, że $D_r^* \cap \Omega = \emptyset$ oraz $\hat{\varphi}$ ma analityczne przedłużenie wzdłuż dowolnej krzywej w $\mathbb{C} \setminus \Omega$ startującej z dowolnego punktu należącego do D_r^* .

Zbiór wszystkich takich kielków będziemy oznaczać symbolem $\widehat{\mathcal{R}}_\Omega$, oczywiście $\widehat{\mathcal{R}}_\Omega \subset \mathbb{C}\{\zeta\}$.

Każdy element przestrzeni $\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\zeta\}$ (przy czym $\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\zeta\}$ to przestrzeń $\mathbb{C} \times \mathbb{C}\{\zeta\}$, w której element $(1, 0)$ oznaczamy przez δ oraz podprzestrzeń $\{0\} \times \mathbb{C}\{\zeta\}$ identyfikujemy z $\mathbb{C}\{\zeta\}$) postaci $c\delta + \hat{\varphi}$, gdzie $c \in \mathbb{C}$ oraz $\hat{\varphi}$ jest Ω -przedłużalnym kielkiem nazywamy Ω -resurgentną funkcją.

Przykład 25. Ω -przedłużalnym kielkiem jest funkcja postaci $f(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - \omega)^2}$, gdzie $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$.

Uwaga 24. Niech $\rho(\Omega) := \min\{|\omega| : \omega \in \Omega \setminus \{0\}\}$. Dowolny $\hat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{R}}_\Omega$ jest holomorficznym kielkiem w 0 o promieniu zbieżności niemniejszym od $\rho(\Omega)$ i w Definicji 55 zawsze można przyjąć $r = \rho(\Omega)$.

Uwaga 25. Od tej chwili, jeżeli $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jest krzywą oraz $\hat{\varphi}$ jest holomorficznym kielkiem w $\gamma(a)$, który dopuszcza analityczne przedłużenie wzdłuż krzywej γ , wtedy przez $\text{cont}_\gamma \hat{\varphi}$ oznaczamy powstały w wyniku tego przedłużenia holomorficzny kielk w $\gamma(b)$.

Przejdziemy teraz do definicji osobliwości (w tym rozdziale rozróżniamy osobliwości i punkty osobliwe – te drugie są lokalizacjami tych pierwszych). Rozpocznijmy od następującej definicji

Definicja 56. Powiemy, że funkcja f ma *spiralne przedłużenie wokół zera*, jeżeli funkcja f jest holomorficzna na otwartym dysku D , do brzegu którego należy 0 oraz jeżeli dla każdego $L > 0$ istnieje $\rho > 0$ takie, że funkcja f może być analitycznie przedłużona wzdłuż dowolnej krzywej o długości nie większej od L , startującej z $D \cap D_\rho^*$ i zostającej w D_ρ^* .

Musimy teraz wyodrębnić jedną ze spójnych składowych dla $\pi^{-1}(D)$ w $\tilde{\mathbb{C}}$ (gdzie π jest takie jak w (4)), ale niestety nie istnieje wybór kanoniczny. Zatem wybierzmy $\zeta_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ takie, że $\pi(\zeta_0)$ jest środkiem dysku D , wówczas

spójną składową dla $\pi^{-1}(D)$, która zawiera ζ_0 , jest $\tilde{D} := \tilde{D}(\zeta_0, R_0)$ (przy czym $\tilde{D}(\zeta_0, R_0)$ jest zbiorem klas równoważności wszystkich krzywych γ powstałych przez konkatenację (zobacz przypis w Uwadze 3) reprezentanta dla ζ oraz odcinka startującego z $\pi(\zeta)$ i zawartego w $D(\pi(\zeta), R_0)$) – to właśnie będzie wyodrębniona spójna składowa.

Skoro π indukuje biholomorfizm $\tilde{D} \xrightarrow{\sim} D$, to możemy identyfikować funkcję f z holomorficzną na \tilde{D} funkcją $\check{f} := f \circ \pi$. Następnie, ponieważ f ma spiralne przedłużenie wokół zera, to \check{f} przedłuża się analitycznie do zbioru

$$V(h) = \{\zeta = r\underline{e}^{i\theta} : 0 < r < h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} \subset \tilde{\mathbb{C}},$$

gdzie $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą.

Definicja 57. Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ będzie funkcją ciągłą oraz $\check{f} : V(h) \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Definiujemy *przestrzeń ANA wszystkich osobliwych kielzków* następująco: na zbiorze wszystkich par (\check{f}, h) określamy relację równoważności

$$(\check{f}_1, h_1) \sim (\check{f}_2, h_2) \iff \check{f}_1 \equiv \check{f}_2 \text{ na } V(h_1) \cap V(h_2)$$

i określamy ANA jako jej zbiór ilorazowy.

Przykład 26. Niech funkcja f będzie holomorficzną na dysku D_ρ^* dla pewnego $\rho > 0$. W szczególności jest ona holomorficzną na $D = D\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$. Dla dowolnego wyboru spójnej składowej dla $\pi^{-1}(D)$ w $\tilde{\mathbb{C}}$ otrzymujemy takie same $\check{f} := f \circ \pi$ w $V(h)$ ze stałą funkcją $h(\theta) \equiv \rho$. Korespondujący element przestrzeni ANA identyfikuje się z szeregiem Laurenta w 0 dla f , który ma postać

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \zeta^n = S(1/\zeta) + R(\zeta),$$

gdzie $R(\zeta) := \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n$ i ma promień zbieżności większy lub równy ρ oraz $S(\xi) := \sum_{n > 0} a_{-n} \xi^n$ i ma nieskończony promień zbieżności.

Przykład 27. Niech funkcja f ma postać $f(\zeta) = \hat{\varphi}(\zeta) \text{Log} \zeta$, gdzie $\hat{\varphi}$ jest funkcją holomorficzną na dysku D_ρ , dla pewnego $\rho > 0$, oraz Log oznacza gałąź główną logarytmu. Wtedy możemy zdefiniować $\check{f}(\zeta) := \hat{\varphi}(\pi(\zeta)) \log \zeta$, dla $\zeta \in V(h)$ ze stałą funkcją $h(\theta) \equiv \rho$. Otrzymujemy sytuację podobną do opisanej w Przykładzie 26, gdzie $D = D\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$ oraz \tilde{D} jest spójną składową dla $\pi^{-1}(D)$, która jest zawarta w powierzchni gałęzi głównej logarytmu³ \tilde{U}_0

³Niech $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Zauważmy, że zbiór $\tilde{U} := \pi^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni $\tilde{\mathbb{C}}$, który ma nieskończenie wiele spójnych składowych postaci $\tilde{U}_m := \{r\underline{e}^{i\theta} \in \tilde{\mathbb{C}} : r > 0, 2\pi m - \pi < \theta < 2\pi m + \pi, m \in \mathbb{Z}\}$. W szczególności, rzutowanie π indukuje biholomorfizm $\pi_0 : \tilde{U}_0 \xrightarrow{\sim} U$. *Powierzchnią gałęzi głównej logarytmu* nazywamy zbiór $\tilde{U}_0 \subset \tilde{\mathbb{C}}$, który za pomocą π_0 identyfikujemy ze zbiorem $U \subset \mathbb{C}$.

przestrzeni $\tilde{\mathbb{C}}$. Odpowiadający element przestrzeni ANA identyfikuje się z

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right) \log \zeta,$$

gdzie $\sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n$ jest szeregiem Taylora w zerze dla $\hat{\varphi}$, który ma promień zbieżności większy bądź równy ρ .

Przykład 28. Dla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiujemy *gałąź główną dla ζ^α* jako $e^{\alpha \text{Log} \zeta}$, dla $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Jeśli wybierzemy D i \tilde{D} takie jak w Przykładzie 27, to $\zeta^\alpha := e^{\alpha \log \zeta}$ jest korespondującym osobliwym kiełkiem, który przedłuża się holomorficznie na całe $\tilde{\mathbb{C}}$.

Definicja 58. *Osobliwościami* nazywamy elementy przestrzeni ilorazowej $SING := ANA/\mathbb{C}\{\zeta\}$. Kanoniczne rzutowanie oznaczamy przez sing_0 oraz używamy notacji

$$\text{sing}_0 : \begin{cases} ANA \longrightarrow SING \\ \check{f} \longmapsto \overset{\nabla}{f} = \text{sing}_0(\check{f}(\zeta)). \end{cases}$$

Dowolny reprezentant \check{f} osobliwości $\overset{\nabla}{f}$ nazywamy *majorem* dla $\overset{\nabla}{f}$.

Przykład 29. Najprostszym przypadkiem jest biegun jednokrotny lub biegun rzędu k , dla których wprowadzamy oznaczenia

$$\delta := \text{sing}_0\left(\frac{1}{2\pi i \zeta}\right), \quad \delta^{(k)} := \text{sing}_0\left(\frac{(-1)^k k!}{2\pi i \zeta^{k+1}}\right) \text{ dla } k \geq 0.$$

Zatem osobliwość dla Przykładu 26 możemy zapisać w postaci

$$2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} a_{-k-1} \delta^{(k)}.$$

Uwaga 26. Zauważmy, że powyższe oznaczenia zgadzają się, z dokładnością do znaku, z wprowadzoną wcześniej deltą Diraca $\delta(x)$ oraz jej pochodnymi (zobacz Przykład 14 oraz Przykład 15).

Przykład 30. W Przykładzie 27 osobliwy kiełek \check{f} był zdefiniowany z funkcji holomorficznej postaci $f(\zeta) = \hat{\varphi}(\zeta) \text{Log} \zeta$, gdzie $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}\{\zeta\}$, poprzez utożsamienie przestrzeni $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ z przestrzenią gałęzi głównej logarytmu \tilde{U}_0 przestrzeni $\tilde{\mathbb{C}}$, zatem możemy traktować \check{f} jako majora.

Definicja 59. Odwzorowanie liniowe indukowane przez odwzorowanie $\check{f}(\zeta) \longmapsto \check{f}(\zeta) - \check{f}(\zeta e^{-2\pi i})$ oznaczamy przez

$$Var : \begin{cases} SING \longrightarrow ANA \\ \overset{\nabla}{f} = \text{sing}_0(\check{f}) \longmapsto \hat{f}(\zeta) = \check{f}(\zeta) - \check{f}(\zeta e^{-2\pi i}). \end{cases}$$

Kiełek $\hat{f} = \text{Var} f$ nazywamy *minorem* osobliwości dla f .

Uwaga 27. Zauważmy, że powyższe odwzorowanie Var zgadza się z wcześniej zdefiniowanym odwzorowaniem var (zobacz Definicja 51), jeżeli w $\text{var}F_z(s)$ weźmiemy $z_0 - z = 0$.

Uwaga 28. Odwzorowanie Var jest dobrze zdefiniowane, gdyż nie zależy od wyboru reprezentanta \check{f} osobliwości f . Mianowicie niech \check{f}_1, \check{f}_2 będą różnymi reprezentantami osobliwości f , wówczas $f = \text{sing}_0(\check{f}_1) = \text{sing}_0(\check{f}_2)$, a stąd $\check{f}_2 = \check{f}_1 + h$, gdzie h jest pewną funkcją holomorficzną. Zatem $\text{Var}(\text{sing}_0(\check{f}_1)) = \check{f}_1(\zeta) - \check{f}_1(\zeta e^{-2\pi i})$, a także zachodzi $\text{Var}(\text{sing}_0(\check{f}_2)) = \check{f}_2(\zeta) - \check{f}_2(\zeta e^{-2\pi i}) = \check{f}_1(\zeta) + h(\zeta) - (\check{f}_1(\zeta e^{-2\pi i}) + h(\zeta e^{-2\pi i})) = \check{f}_1(\zeta) - \check{f}_1(\zeta e^{-2\pi i})$.

Przykład 31. Dla każdej funkcji $\hat{\varphi}$ holomorficzej na dysku D_ρ^* mamy, że

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\text{sing}_0\left(\hat{\varphi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i}\right)\right) &= \hat{\varphi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i} - \hat{\varphi}(\zeta e^{-2\pi i})\frac{\log(\zeta e^{-2\pi i})}{2\pi i} \\ &= \hat{\varphi}(\zeta)\frac{\ln|\zeta| + i\arg\zeta}{2\pi i} - \hat{\varphi}(\zeta e^{-2\pi i})\frac{\ln|\zeta| + i\arg\zeta - 2\pi i}{2\pi i} = \hat{\varphi}(\zeta). \end{aligned}$$

Definicja 60. *Prostą osobliwością* nazywamy dowolną osobliwość postaci $\check{\varphi} = a\delta + \text{sing}_0\left(\hat{\varphi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i}\right)$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ oraz $\hat{\varphi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$. Przestrzeń wszystkich prostych osobliwości oznaczamy przez $SING^{simp}$. Funkcja f określona na dysku otwartym D , takim, że $0 \in \partial D$, ma *prostą osobliwość w zerze*, jeśli ma spiralne przedłużenie wokół zera oraz dla każdego wyboru obszaru $\tilde{D} \subset \tilde{\mathbb{C}}$, który rzutuje różnowartościowo na część dziedziny funkcji f , formuła $\check{f} := f \circ \pi|_{\tilde{D}}$ określa majora prostej osobliwości.

Przykład 32. Niech $\hat{\varphi}(\zeta) = \frac{a}{\zeta}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$. Wówczas $\text{sing}_0(\hat{\varphi}(\zeta)) = \text{sing}_0\left(\frac{a}{\zeta}\right) = 2\pi i a \delta$.

Przykład 33. Niech $\hat{\varphi}(\zeta) = \frac{\log\zeta}{1-\zeta}$. Wówczas $\text{sing}_0(\hat{\varphi}(\zeta)) = \text{sing}_0\left(\frac{\log\zeta}{1-\zeta}\right) = \frac{1}{1-\zeta}\text{sing}_0(\log\zeta) = \frac{2\pi i}{1-\zeta}$.

Uwaga 29. Innymi słowy, przestrzeń $SING^{simp}$ jest obrazem odwzorowania liniowego

$$a\delta + \hat{\varphi}(\zeta) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\{\zeta\} \longmapsto a\delta + \text{sing}_0\left(\hat{\varphi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i}\right) \in SING.$$

Powyższe odwzorowanie jest różnowartościowe, stąd otrzymujemy izomorfizm

$$\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\zeta\} \xrightarrow{\sim} SING^{simp}.$$

Stąd wynika również, że Ω -resurgentne funkcje możemy traktować jako proste osobliwości.

Definicja 61. Niech Ω będzie niepustym, domkniętym, dyskretnym podzbiorem zbioru \mathbb{C} , takim, że $0 \in \Omega$. Definiujemy $SING_{\Omega}$ przestrzeń Ω -resurgentnych osobliwości jako przestrzeń wszystkich osobliwości $\check{\varphi} \in SING$, których minory $\hat{\varphi} = Var^{\check{\varphi}} \in ANA$ są Ω -przedłużalne w następującym sensie: niech $V(h) \subset \tilde{\mathbb{C}}$ będzie zbiorem, w którym $\hat{\varphi}$ definiuje funkcję holomorficzną, $\hat{\varphi}$ dopuszcza analityczne przedłużenie wzdłuż dowolnej krzywej $\tilde{\gamma}$ w $\tilde{\mathbb{C}}$ startującej z $V(h)$ takiej, że $\pi \circ \tilde{\gamma}$ zawiera się w $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Wówczas zachodzi

$$SING^{simp} \cap SING_{\Omega} \hookrightarrow \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\zeta\} = SING^{simp} \hookrightarrow SING.$$

Przykład 34. Niech $\varphi(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta} \log(\zeta)$. Funkcja ta ma osobliwości należące do zbioru $\Omega = \{-1, 0\}$.

Definicja 62. Niech Ω będzie niepustym, domkniętym, dyskretnym podzbiorem zbioru \mathbb{C} i niech $\omega \in \Omega$. Niech γ będzie krzywą w $\mathbb{C} \setminus \Omega$ startującą z punktu $\zeta_0 \in D_{\rho(\Omega)}^*$ i o końcu w punkcie ζ_1 takim, że istnieje otwarty dysk $D \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ o środku w punkcie ζ_1 , do brzegu którego należy ω , oraz $\xi \in \tilde{\mathbb{C}}$ spełnia $\pi(\xi) = -\omega + \zeta_1$. Wówczas definiujemy odwzorowanie liniowe

$$\mathbb{A}_{\omega}^{\gamma, \xi} : \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{\Omega} \longrightarrow SING$$

nazywane *obcym operatorem powiązany z (ω, γ, ξ)* za pomocą formuły

$$\mathbb{A}_{\omega}^{\gamma, \xi}(a\delta + \hat{\varphi}) := \text{sing}_0(\check{f}(\zeta)), \quad \check{f}(\zeta) = \text{cont}_{\gamma} \hat{\varphi}(\omega + \pi(\zeta)) \text{ dla } \zeta \in \tilde{D}(\xi),$$

gdzie $\tilde{D}(\xi) \subset \tilde{\mathbb{C}}$ jest spójną składową $\pi^{-1}(-\omega + D)$, która zawiera ξ .

Uwaga 30. Operator obcy $\mathbb{A}_{\omega}^{\gamma, \xi}$ mierzy osobliwość w punkcie ω dla przedłużenia analitycznego wzdłuż krzywej γ minora $\hat{\varphi}$. Oczywiście, jeżeli ω nie jest punktem osobliwym dla $\text{cont}_{\gamma} \hat{\varphi}$, to $\mathbb{A}_{\omega}^{\gamma, \xi}(\hat{\varphi}) = 0$. Ponadto, przecięciem jąder wszystkich operatorów $\mathbb{A}_{\omega}^{\gamma, \xi}$ jest przestrzeń $\mathbb{C}\delta \oplus \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Przykład 35. Rozważmy $\hat{\varphi}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \text{Log}(1 - \zeta)$, niech $\Omega = \{0, 1\}$ oraz niech γ będzie krzywą zawartą w $(0, 1)$ o końcu w punkcie $\zeta_1 = \frac{1}{2}$. Zajmijmy się najpierw osobliwością w punkcie $\omega = 0$. Dla każdego ξ rzutującego na

$0 + \zeta_1 = \frac{1}{2}$, skoro $\xi = \frac{1}{2}e^{2\pi ik}$, mamy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_0^{\gamma, \xi}(\widehat{\varphi}) &= \text{sing}_0\left(\text{cont}_\gamma \widehat{\varphi}(\pi(\zeta))\right) = \text{sing}_0\left(-\frac{1}{\pi(\zeta)}\text{Log}(1 - \pi(\zeta))\right) \\ &= \text{sing}_0\left(-\frac{1}{\zeta e^{-2\pi ik}}\log(1 - \zeta e^{-2\pi ik})\right) = 0,\end{aligned}$$

ponieważ na gałęzi głównej logarytmu funkcja $-\frac{1}{\zeta e^{-2\pi ik}}\log(1 - \zeta e^{-2\pi ik})$ nie ma osobliwości w zerze. Rozważmy teraz osobliwość w punkcie $\omega = 1$. Dla każdego ξ rzutującego na $-1 + \zeta_1 = -\frac{1}{2}$ skoro $\xi = -\frac{1}{2}e^{2\pi ik}$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_1^{\gamma, \xi}(\widehat{\varphi}) &= \text{sing}_0\left(\text{cont}_\gamma \widehat{\varphi}(1 + \pi(\zeta))\right) = \text{sing}_0\left(-\frac{1}{1 + \pi(\zeta)}\text{Log}(-\pi(\zeta))\right) \\ &= \text{sing}_0\left(-\frac{1}{1 + \zeta e^{-2\pi ik}}\text{Log}(-\zeta e^{-2\pi ik})\right) = -\frac{1}{1 + \zeta}\text{sing}_0(\text{Log}(\zeta e^{-(2k+1)\pi i})) \\ &= -\frac{1}{1 + \zeta}\text{sing}_0(\log(\zeta) - (2k + 1)\pi i) = -\frac{2\pi i}{1 + \zeta}.\end{aligned}$$

Jeśli γ okrąży N razy osobliwość $\omega = 1$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_1^{\gamma, \xi}(\widehat{\varphi}) &= \text{sing}_0\left(\text{cont}_\gamma \widehat{\varphi}(1 + \pi(\zeta))\right) = \text{sing}_0\left(-\frac{1}{1 + \pi(\zeta)}\text{Log}(-\pi(\zeta))\right) \\ &= \text{sing}_0\left(-\frac{1}{1 + \zeta e^{-2\pi ik} e^{2\pi iN}}\text{Log}(-\zeta e^{-2\pi ik} e^{2\pi iN})\right) \\ &= -\frac{1}{1 + \zeta}\text{sing}_0(\text{Log}(\zeta e^{-(2k-2N+1)\pi i})) \\ &= -\frac{1}{1 + \zeta}\text{sing}_0(\log(\zeta) - (2k - 2N + 1)\pi i) = -\frac{2\pi i}{1 + \zeta}.\end{aligned}$$

Natomiast, jeżeli γ okrąży N razy osobliwość $\omega = 1$ oraz ξ rzutuje na $0 + \zeta_1 = \frac{1}{2}$ to

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_0^{\gamma, \xi}(\widehat{\varphi}) &= \text{sing}_0\left(\text{cont}_\gamma \widehat{\varphi}(\pi(\zeta))\right) = \text{sing}_0\left(-\frac{1}{\pi(\zeta)}\text{Log}(1 - \pi(\zeta))\right) \\ &= \text{sing}_0\left(-\frac{1}{\zeta e^{-2\pi ik}}\text{Log}(1 - \zeta e^{-2\pi ik}) + 2\pi iN\right) = -(2\pi i)^2 N \text{sing}_0\left(\frac{1}{2\pi i \zeta}\right) \\ &= -(2\pi i)^2 N \delta.\end{aligned}$$

Definicja 63. Niech Ω będzie niepustym, domkniętym, dyskretnym podzbiorem zbioru \mathbb{C} . *Prostą Ω -resurgentą funkcją* nazywamy każdą Ω -resurgentną funkcję $\widehat{\varphi}$ taką, że dla dowolnych (ω, γ, ξ) , takich jak w Definicji 62, $\mathbb{A}_\omega^{\gamma, \xi} \widehat{\varphi}$ jest prostą osobliwością.

Zbiór wszystkich prostych Ω -resurgentnych funkcji oznaczamy symbolem $\mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{simp}$, gdzie $\widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{simp}$ jest zbiorem wszystkich Ω -resurgentnych funkcji nieposiadających wyrazu wolnego.

Przykład 36. Funkcja $\widehat{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \log(1 + \zeta)$ jest prostą Ω -resurgentną funkcją dla $\Omega = \{0, 1\}$.

Stwierdzenie 13 ([21, Lemat 6.54]). *Niech (ω, γ, ξ) będą takie jak w Definicji 62. Wówczas*

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\varphi} \in \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_\Omega &\implies \mathbb{A}_\omega^{\gamma, \xi} \overset{\nabla}{\varphi} \in SING_{-\omega+\Omega} \\ \overset{\nabla}{\varphi} \in \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{simp} &\implies \mathbb{A}_\omega^{\gamma, \xi} \overset{\nabla}{\varphi} \in \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{simp}. \end{aligned}$$

Ponadto, w ostatnim przypadku $\mathbb{A}_\omega^{\gamma, \xi} \overset{\nabla}{\varphi}$ nie zależy od wyboru ξ w $\pi^{-1}(-\omega + \zeta_1)$, więc możemy zapisać krótko $\mathbb{A}_\omega^\gamma \overset{\nabla}{\varphi}$.

Zatem mamy zdefiniowany operator

$$\mathbb{A}_\omega^\gamma : \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{simp} \longrightarrow \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{simp}.$$

Definicja 64. Niech $\omega \in \Omega$. Operatorem obcym w ω nazywamy każdą kombinację liniową złożenia operatorów postaci

$$\mathbb{A}_{\omega-\omega_{r-1}}^{\gamma_r} \circ \dots \circ \mathbb{A}_{\omega_2-\omega_1}^{\gamma_2} \circ \mathbb{A}_{\omega_1}^{\gamma_1}$$

traktowaną jako operatory $\mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{simp} \longrightarrow \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{simp}$, gdzie $r \geq 1$, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1} \in \Omega$ oraz γ_j jest dowolną krzywą w $\mathbb{C} \setminus (-\omega_{j-1} + \Omega)$ startującą z $D_{\rho(-\omega_{j-1} + \Omega)}^*$ i o końcu w dysku $D_j \subset D \setminus (-\omega_{j-1} + \Omega)$, do brzegu którego należy $\omega_j - \omega_{j-1}$ dla wszystkich $j = 1, 2, \dots, r$ (przy ustaleniu, że $\omega_0 = \omega$, $\omega_r = \omega$), więc operator $\mathbb{A}_{\omega_j-\omega_{j-1}}^{\gamma_j} : \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega_{j-1}+\Omega}^{simp} \longrightarrow \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega_j+\Omega}^{simp}$ jest dobrze zdefiniowany.

Przykład 37. Niech $\widehat{\varphi}(\zeta) = \frac{c_\omega}{\zeta-\omega} + g(\zeta)$, gdzie g jest funkcją holomorficzną

w otoczeniu punktu ω . Wówczas $\mathbb{A}_\omega^\gamma(\widehat{\varphi}) = \text{sing}_0 \left(\text{cont}_\gamma \widehat{\varphi}(\omega + \pi(\zeta)) \right) =$

$\text{sing}_0 \left(\text{cont}_\gamma \left(\frac{c_\omega}{\pi(\zeta)} + g(\omega + \pi(\zeta)) \right) \right) = \text{sing}_0 \left(\frac{c_\omega}{\zeta} \right) = c_\omega \text{sing}_0 \left(\frac{1}{\zeta} \right) = 2\pi i c_\omega \delta$. Stąd

jeśli $\widehat{\varphi}(\zeta)$ będzie funkcją meromorficzną, regularną w zerze, której wszystkie bieguny są biegunami jednokrotnymi, które znajdują się w zbiorze Ω , to wówczas $\mathbb{A}_\omega^\gamma(\widehat{\varphi})$ nie zależy od γ oraz $\mathbb{A}_\omega^\gamma \widehat{\varphi} = 2\pi i c_\omega \delta$, gdzie c_ω to residuum funkcji $\widehat{\varphi}$ w punkcie ω .

Przykład 38. Z powyższego przykładu łatwo widać, że dla dowolnej krzywej γ oraz

- $\widehat{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta}$, mamy, że $\mathbb{A}_{-1}^\gamma \widehat{\varphi} = 2\pi i \delta$,
- $\widehat{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{1-e^{s-\zeta}}$, gdzie $s \in \mathbb{C}$, mamy, że $\mathbb{A}_{s+2\pi i k}^\gamma \widehat{\varphi} = 2\pi i \delta$ dla $k \in \mathbb{Z}$,

- $\widehat{\varphi}(\zeta) = \zeta^{-2} \left(\frac{\zeta}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\zeta}{2} \right) - 1 \right)$, mamy, że $\mathbb{A}_{2\pi i m}^\gamma \widehat{\varphi} = \frac{1}{m} \delta$ dla $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Definicja 65. Niech Ω będzie niepustym, domkniętym, dyskretnym podzbiorem zbioru \mathbb{C} . Niech $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$. Przez \prec oznaczmy liniowy porządek indukowany przez $t \in [0, 1] \mapsto t\omega \in [0, \omega]$ i zapiszmy

$$[0, \omega] \cap \Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \omega_r\}, \quad 0 = \omega_0 \prec \omega_1 \prec \dots \prec \omega_{r-1} \prec \omega_r = \omega,$$

gdzie $r \in \mathbb{N}_+$ i zależy od ω oraz Ω . Dla każdego $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}) \in \{+, -\}^{r-1}$ definiujemy *operatory obce w ω związane z ε*

$$\mathbb{A}_{\omega, \varepsilon}^\Omega : \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{\text{simp}} \longrightarrow \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\text{simp}}$$

za pomocą formuły $\mathbb{A}_{\omega, \varepsilon}^\Omega = \mathbb{A}_\omega^\gamma$, dla dowolnej krzywej γ wybranej następująco: bierzemy wystarczająco małe $R > 0$ takie, że dyski domknięte $D_j := \bar{D}(\omega_j, R)$, gdzie $j = 0, 1, \dots, r$, są parami rozłączne oraz $D_j \cap \Omega = \{\omega_j\}$, następnie bierzemy dowolną krzywą γ łączącą $(0, \omega) \cap D_0$ z $(0, \omega) \cap D_r$ odcinkiem $(0, \omega)$ z wyjątkiem tego, że dla $1 \leq j \leq r-1$ część wspólna $(0, \omega) \cap D_j$ jest zastąpiona przez jeden z półokręgów, które są spójnymi składowymi dla $(0, \omega) \cap \partial D_j$: krzywa γ omija ω_j z prawej strony jeśli $\varepsilon_j = +$, a z lewej strony jeśli $\varepsilon_j = -$.

Definicja 66. Dla każdego $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ definiujemy *szczególny operator obcy w ω*

$$\Delta_\omega^+ : \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_\Omega^{\text{simp}} \longrightarrow \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{\text{simp}}$$

za pomocą

$$\Delta_\omega^+ := \mathbb{A}_{\omega, (+, +, \dots, +)}^\Omega.$$

Ustalmy teraz zbiór Ω i promień $\mathcal{L}_\theta = \{te^{i\theta} : t \geq 0\}$ dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez \prec liniowy porządek na \mathcal{L}_θ indukowany przez $t \mapsto te^{i\theta}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że zbiór $\Omega \cap \mathcal{L}_\theta$ jest nieskończony i zawiera 0 oraz możemy go zapisać jako wstępujący ciąg

$$\Omega \cap \mathcal{L}_\theta = \{\omega_m\}_{m \in \mathbb{N}} \quad 0 = \omega_0 \prec \omega_1 \prec \omega_2 \prec \dots$$

Definicja 67. Dla każdego $\omega = \omega_m \in \Omega \cap \mathcal{L}_\theta$ definiujemy

- $\widehat{E}_\omega(\Omega)$ - przestrzeń wszystkich funkcji $\widehat{\varphi}$ holomorficznych w ω , które mogą być analitycznie przedłużone wzdłuż dowolnej krzywej w $\mathbb{C} \setminus \Omega$ startującej z punktu położonego wystarczająco blisko ω , oraz których analityczne przedłużenie ma w najgorszym przypadku proste osobliwości.
- $\widehat{E}_\omega(\Omega)$ - przestrzeń wektorowa $\mathbb{C}\delta_\omega \oplus \widehat{E}_\omega(\Omega)$, gdzie δ_ω jest translacją δ z 0 na ω , czyli prostą osobliwością w ω reprezentowaną przez $\frac{1}{2\pi i(\zeta - \omega)}$.

- $\check{E}_\omega(\Omega, \mathcal{L}_\theta)$ - przestrzeń wszystkich funkcji \check{f} holomorficzych na odcinku (ω_m, ω_{m+1}) , które mogą być analitycznie przedłużone wzdłuż dowolnej krzywej w $\mathbb{C} \setminus \Omega$ stratującej z tego odcinka, oraz których analityczne przedłużenie ma w najgorszym przypadku proste osobliwości.

Dla uproszczenia zapisu będziemy pisać krótko $\overset{\nabla}{E}_\omega$ lub \check{E}_ω .

Uwaga 31. Zauważmy, że istnieje liniowy izomorfizm

$$\tau_\omega : \begin{cases} \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega+\Omega}^{simp} \xrightarrow{\sim} \overset{\nabla}{E}_\omega \\ a\delta + \widehat{\varphi} \mapsto a\delta_\omega + \widehat{\varphi}^\omega, \quad \widehat{\varphi}^\omega := \widehat{\varphi}(\zeta - \omega), \end{cases}$$

oraz odwzorowanie liniowe

$$\overset{\bullet}{\sigma} : \begin{cases} \check{E}_{\omega_m} \longrightarrow \overset{\nabla}{E}_{\omega_{m+1}} \\ \check{f} \mapsto \tau_{\omega_{m+1}} \overset{\nabla}{\varphi}, \quad \overset{\nabla}{\varphi} := \text{sing}_0(\check{f}(\omega_{m+1} + \zeta)) \end{cases}$$

Definicja 68. Zdefiniujmy *operator minora*

$$\mu : \begin{cases} \overset{\nabla}{E}_\omega \longrightarrow \check{E}_\omega \\ a\delta_\omega + \widehat{\phi} \mapsto \widehat{\phi}|_{(\omega_m, \omega_{m+1})} \end{cases}$$

oraz *operator bocznej kontynuacji*

$$\overset{\bullet}{l}_\pm : \begin{cases} \check{E}_\omega \longrightarrow \check{E}_{\omega_{m+1}} \\ \check{f} \mapsto \text{cont}_{\gamma_\pm} \check{f} \end{cases}$$

gdzie γ_+ (odpowiednio γ_-) jest dowolną krzywą łączącą odcinek (ω_m, ω_{m+1}) z odcinkiem $(\omega_{m+1}, \omega_{m+2})$ zostającą w otoczeniu odcinka (ω_m, ω_{m+2}) , której przecięcie ze zbiorem Ω redukuje się do $\{\omega_{m+1}\}$ i która okrąży ω_{m+1} z prawej strony (odpowiednio z lewej strony).

Uwaga 32. Zauważmy, że zachodzi $\mu \circ \overset{\bullet}{\sigma} = \overset{\bullet}{l}_+ - \overset{\bullet}{l}_-$.

Definicja 69. Niech $\overset{\nabla}{E} = \overset{\nabla}{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta) := \widehat{\bigoplus}_{\omega \in \Omega \cap \mathcal{L}_\theta} \overset{\nabla}{E}_\omega(\Omega)$ oraz $\check{E} = \check{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta) := \widehat{\bigoplus}_{\omega \in \Omega \cap \mathcal{L}_\theta} \check{E}_\omega(\Omega)$. Dla każdego $r \in \mathbb{N}_+$ definiujemy r -jednorodny operator $\overset{\bullet}{\Delta}_r^+ : \overset{\nabla}{E} \longrightarrow \overset{\nabla}{E}$ następująco $\overset{\bullet}{\Delta}_r^+ := \overset{\bullet}{\sigma} \circ \overset{\bullet}{l}_+^{r-1} \circ \mu$.

Stwierdzenie 14 ([21, Twierdzenie 6.73]).

(i) Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ oraz $r \in \mathbb{N}_+$ zachodzi diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega_m+\Omega}^{simp} & \xrightarrow{\Delta_{\omega_{m+r}-\omega_m}^+} & \mathbb{C}\delta \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{-\omega_{m+r}+\Omega}^{simp} \\ \tau_{\omega_m} \downarrow & & \downarrow \tau_{\omega_{m+r}} \\ \check{E}_{\omega_m}(\Omega, \mathcal{L}_\theta) & \xrightarrow{\dot{\Delta}_r^+} & \check{E}_{\omega_{m+r}}(\Omega, \mathcal{L}_\theta) \end{array}$$

(ii) Formuła $\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+ := \text{Id} + \sum_{r \in \mathbb{N}_+} \dot{\Delta}_r^+$ definiuje operator

$$\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+ : \check{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta) \longrightarrow \check{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta).$$

Definicja 70.

- Elementy przestrzeni $\check{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta)$ nazywamy Ω -resurgentnymi symbolami z nośnikiem w \mathcal{L}_θ .
- Operator $\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+$ występujący w Stwierdzeniu 14 nazywamy symbolicznym automorfizmem Stokesa dla kierunku \mathcal{L}_θ .

Przykład 39. Niech będzie dana funkcja $v(s) = \frac{a}{s-s_0}$ dla pewnego $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dla którego $\theta = \text{args}_0$. Wówczas wykorzystując Przykład 38, Definicję 66, Stwierdzenie 14 oraz powyższą definicję otrzymamy, że $\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+ v(s) = v(s) + 2\pi ia \delta_{s_0}$.

Wprowadźmy jeszcze następującą notację

Notacja. Niech tak jak poprzednio będzie ustalony zbiór Ω i promień $\mathcal{L}_\theta = \{te^{i\theta} : t \geq 0\}$ dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$. Niech I będzie przedziałem otwartym o długości mniejszej niż π i zawierającym θ takim, że

$$\Omega \cap \{\xi e^{i\theta'} : \xi \geq 0, \theta' \in I\} = \{\omega_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_\theta, \quad 0 = \omega_0 \prec \omega_1 \prec \omega_2 \prec \dots$$

Oznaczmy

$$I^- := \{\theta^- \in I : \theta^- < \theta\}, \quad I^+ := \{\theta^+ \in I : \theta^+ > \theta\},$$

oraz

$$I_\varepsilon^- := \{\theta^- \in I : \theta^- < \theta - \varepsilon\}, \quad I_\varepsilon^+ := \{\theta^+ \in I : \theta^+ > \theta + \varepsilon\},$$

dla $0 < \varepsilon < \min\{\frac{\pi}{2}, \text{dist}(\theta, \partial I)\}$.

Niech $e_m(z)$ będzie funkcją jądrową rzędu $k > 0$ (czyli funkcja ta spełnia m.in. warunek, że dla każdego $\varepsilon_1 > 0$ istnieją stałe $A_{\varepsilon_1}, B_{\varepsilon_1} > 0$ takie, że $|e_m(z)| \leq A_{\varepsilon_1} e^{-(|z|/B_{\varepsilon_1})^k}$ dla $z \in S_0(\pi/k - \varepsilon_1)$). Dla funkcji ciągłej $\widehat{\varphi} : e^{i\theta}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ spełniającej warunek, że $|\widehat{\varphi}(\zeta)| \leq A e^{(c_0|\zeta|)^k}$ dla $\zeta \in e^{i\theta}[1, +\infty)$

i pewnych stałych $A > 0$ i $c_0 > 0$, definiujemy *transformację Laplace'a* następująco

$$(L^\theta \hat{\varphi})(t) = \int_0^{+\infty} e_m(\zeta e^{i\theta}/t) \hat{\varphi}(\zeta e^{i\theta}) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

która jest dobrze określoną funkcją holomorficzną na zbiorze

$$\Pi_{c_0 B_{\varepsilon_1}, \varepsilon_1, k}^\theta := \left\{ t \in \mathbb{C} : \arg t \in \left(\theta - \frac{\pi}{2k} + \frac{\varepsilon_1}{2}, \theta + \frac{\pi}{2k} - \frac{\varepsilon_1}{2} \right), |t| < \frac{1}{c_0 B_{\varepsilon_1}} \right\}.$$

Weźmy teraz lokalnie ograniczoną funkcję $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dla każdej lokalnie ograniczonej funkcji $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ przez $\mathcal{N}(I, k, \gamma, \alpha)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich kielków $\hat{\varphi}(\zeta)$ holomorficznym w 0, które przedłużają się analitycznie do sektora $\{\xi e^{i\theta} : \xi > 0, \theta \in I\}$ oraz spełniają warunek $|\hat{\varphi}(\xi e^{i\theta})| \leq \alpha(\theta) e^{(\gamma(\theta)\xi)^k}$ dla $\xi > 0, k > 0, \theta \in I$. Poprzez $\mathcal{N}(I, k, \gamma)$ będziemy określać zbiór tych $\hat{\varphi}(\zeta)$, dla których istnieje lokalnie ograniczona funkcja α taka, że $\hat{\varphi} \in \mathcal{N}(I, k, \gamma, \alpha)$. Ponadto niech $\mathcal{D}(I, k, \gamma) := \bigcup_{\theta \in I} \Pi_{\gamma(\theta) B_{\varepsilon_1}, \varepsilon_1, k}^\theta$. Dla każdego $\hat{\varphi} \in \mathcal{N}(I, k, \gamma)$ zdefiniujemy funkcję $L^I \hat{\varphi}(t)$ holomorficzną w $\mathcal{D}(I, k, \gamma)$, zwaną *operatorem Laplace'a*, wzorem

$$L^I \hat{\varphi}(t) = L^\theta \hat{\varphi}(t), \text{ gdzie } \theta \in I \text{ jest takie, że } t \in \Pi_{\gamma(\theta) B_{\varepsilon_1}, \varepsilon_1, k}^\theta$$

dla każdego $t \in \mathcal{D}(I, k, \gamma)$.

Uwaga 33. Zauważmy, że stosując zamianę zmiennych możemy zapisać powyższy operator Laplace'a w postaci

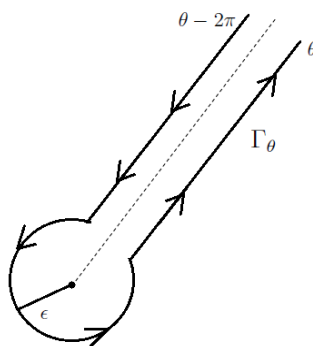
$$(L^I \hat{\varphi})(t) = \int_{e^{i\theta} \mathbb{R}_+} e_m(s/t) \hat{\varphi}(s) \frac{ds}{s}, \text{ dla } \theta \in I,$$

czyli $(L^I \hat{\varphi})(t) = (T_{m, \theta} \hat{\varphi})(t)$, gdzie operator całkowy $T_{m, \theta}$ został zdefiniowany w Definicji 28.

Niech teraz $\check{\varphi} = a\delta + \hat{\varphi}(\zeta)$ będzie prostą osobliwością, gdzie $a \in \mathbb{C}$ oraz $\hat{\varphi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$. Wybierzmy majora $\check{\varphi}(\zeta)$ dla $\check{\varphi}$ w postaci $\frac{a}{2\pi i \zeta} + \hat{\varphi}(\zeta) \frac{\text{Log}_D(\zeta)}{2\pi i}$, przy czym $\text{Log}_D(\zeta)$ jest dowolną gałęzią logarytmu na otwartym dysku D . Wówczas operator \tilde{L} zdefiniowany jako

$$(\tilde{L} \check{\varphi})(t) := a + L^\theta \hat{\varphi}(t) = \int_{\Gamma_\theta} e_m(s/t) \check{\varphi}(s) \frac{ds}{s}$$

nazywamy *transformacją Laplace'a majorów*, przy czym Γ_θ jest krzywą przebiegającą z nieskończoności wzdłuż $\underline{e}^{i(\theta-2\pi)}[\epsilon, +\infty)$, następnie okrążającą zero po kole o promieniu ϵ (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) i powracającą do nieskończoności wzdłuż $\underline{e}^{i\theta}[\epsilon, +\infty)$, gdzie $\epsilon > 0$ (patrz rysunek poniżej).

Rys.7 Krzywa Γ_θ .

Uwaga 34. Zauważmy, że transformacja Laplace'a majorów jest resurgentnym odpowiednikiem m -moment operatora Laplace'a dla hiperfunkcji występującej w Definicji 50.

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$\bar{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta, m) := \bigoplus_{j=0}^m \bar{E}_{\omega_j}(\Omega)$$

oraz przez $[\cdot]_m$ oznaczmy kanoniczne rzutowanie

$$\Phi = \sum_{\omega \in \Omega \cap \mathcal{L}_\theta} \Phi^\omega \in \bar{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta) \mapsto [\Phi]_m := \sum_{j=0}^m \Phi^{\omega_j} \in \bar{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta, m),$$

gdzie $\Phi^{\omega_j} = a_j \delta_{\omega_j} + \hat{\varphi}^{\omega_j}$ oraz $\hat{\varphi}^{\omega_j}(\zeta) := \hat{\varphi}(\zeta - \omega_j)$ (przyjmujemy, że $a_0 = 0$).

Dla każdego $\omega \in \Omega \cap \mathcal{L}_\theta$

$$\bar{E}_\omega^{I, \gamma}(\Omega) := \tau_\omega \left(\mathbb{C}\delta \oplus \left(\widehat{\mathcal{R}}_{-\omega_m + \Omega}^{simp} \cap \mathcal{N}(I^+, k, \gamma) \cap \mathcal{N}(I^-, k, \gamma) \right) \right) \subset \bar{E}_\omega(\Omega).$$

Ponadto, zdefiniujemy przestrzeń $\bar{E}^{I, \gamma}(\Omega, \mathcal{L}_\theta, m) := \bigoplus_{j=0}^m \bar{E}_{\omega_j}^{I, \gamma}(\Omega) \subset \bar{E}(\Omega, \mathcal{L}_\theta, m)$, na której zdefiniujemy operatory \mathfrak{L}^+ oraz \mathfrak{L}^- następująco

$$\Phi = \sum_{j=0}^m \Phi^{\omega_j} \mapsto \mathfrak{L}^\pm \Phi \text{ holomorficzne w } \mathcal{D}(I^\pm, k, \gamma),$$

$$\mathfrak{L}^\pm \Phi(t) := \sum_{j=0}^m \mathbb{L}^{\theta^\pm}(\Phi^{\omega_j})(t),$$

$$\text{gdzie } \mathbb{L}^{\theta^\pm}(\Phi^{\omega_j})(t) := \frac{a_j e_m(\omega_j/t)}{\omega_j} + \int_{\omega_j}^{\infty(\theta^\pm)} e_m(s/t) \hat{\varphi}^{\omega_j}(s) \frac{ds}{s}.$$

Zanim przejdziemy do głównego twierdzenia tego rozdziału, wprowadźmy jeszcze jedną definicję

Definicja 71. Niech $C_k > 0$ będzie największą możliwą liczbą taką, że $(a + b)^k \geq C_k(a^k + b^k)$ dla każdego $a, b > 0$.

Twierdzenie 16 (por.[21, Twierdzenie 6.77]). Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz niech $\rho, \varepsilon \in \mathbb{R}$ będą takie, że $|\omega_m| < \rho < |\omega_{m+1}|$ oraz $0 < \varepsilon < \min\{\frac{\pi}{2k}, \text{dist}(\theta, \partial I)\}$.

Wówczas dla każdego $\Phi \in E^{\nabla I, \gamma}(\Omega, \mathcal{L}_\theta, m)$ takiego, że $[\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+ \Phi]_m \in E^{\nabla I, \gamma}(\Omega, \mathcal{L}_\theta, m)$ mamy, że

$$(39) \quad \mathfrak{L}^- \Phi(t) = \mathfrak{L}^+ [\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+ \Phi]_m(t) + O(e^{-N|\frac{\rho}{t}|^k})$$

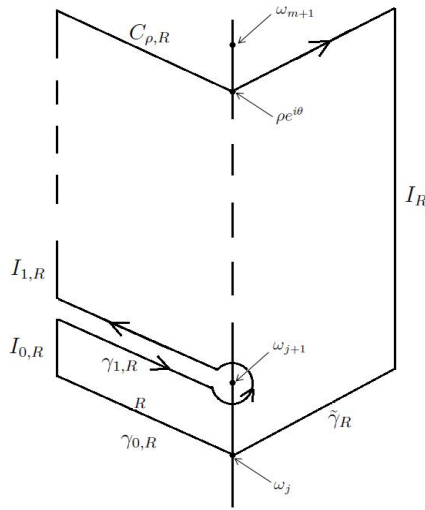
jednostajnie dla $t \in \mathcal{D}(I_\varepsilon^+, k, (\gamma + \varepsilon)C_k^{-1/k}) \cap \mathcal{D}(I_\varepsilon^-, k, (\gamma + \varepsilon)C_k^{-1/k})$ oraz pewnej stałej $N > 0$ oraz stałej C_k zdefiniowanej w Definicji 71.

Dowód. Zauważmy, że dowód wystarczy przeprowadzić dla każdego jednorodnego składnika Φ , zatem możemy przyjąć, że $\Phi = a\delta_{\omega_j} + \hat{\varphi} \in E_{\omega_j}^{\nabla I, \gamma}(\Omega)$, gdzie $0 \leq j \leq m$. Dla danego $t \in \mathcal{D}(I_\varepsilon^+, k, (\gamma + \varepsilon)C_k^{-1/k}) \cap \mathcal{D}(I_\varepsilon^-, k, (\gamma + \varepsilon)C_k^{-1/k})$ wybieramy $\theta^+ \in I_\varepsilon^+$ oraz $\theta^- \in I_\varepsilon^-$ takie, że $\zeta \mapsto \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta}$ maleje wykładniczo na promieniach $e^{i\theta^\pm} \mathbb{R}_+$.

Oznaczmy (zobacz Rys.8)

$$\Gamma_R := \left(\bigcup_{l=0}^{m-j} (\gamma_{l,R} \cup I_{l,R}) \right) \cup C_{\rho,R} \cup I_R \cup \tilde{\gamma}_R,$$

przy czym $I_{l,R} := [\omega_{j+l} + Re^{i\theta^+}, \omega_{j+l+1} + Re^{i\theta^+}]$, gdzie $l = 0, 1, \dots, m-j$.



Rys.8 Krzywa Γ_R .

Wówczas

$$0 = \int_{\Gamma_R} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta = \left(\sum_{l=0}^{m-j} \left(\int_{\gamma_{l,R}} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta + \int_{I_{l,R}} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta \right) \right) \\ + \int_{C_{\rho,R}} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta + \int_{I_R} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta + \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta.$$

Możemy oszacować

$$\int_{\omega_j + Re^{i\theta^+}}^{\omega_{j+1} + Re^{i\theta^+}} \left| \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) \right| d\zeta \leq |\omega_{j+1} - \omega_j| \cdot \sup_{\zeta \in I_{j,R}} \left| \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) \right| \\ \leq |\omega_{j+1} - \omega_j| \cdot \sup_{\zeta \in I_{j,R}} A_{\varepsilon_1} e^{-\left(\frac{|\zeta/t|}{B_{\varepsilon_1}}\right)^k} \alpha(\theta) e^{(\gamma(\theta)|\zeta|)^k}.$$

Dla $t \in \bigcup_{\theta \in I} \Pi_{(\gamma(\theta)+\varepsilon)B_{\varepsilon_1}C_k^{-1/k}, \varepsilon_1, k}^\theta$ mamy, że

$$e^{|\tilde{\zeta}|^k \left(\gamma^k(\theta) - \frac{1}{(|t|B_{\varepsilon_1})^k} \right)} < e^{|\tilde{\zeta}|^k \left(\gamma^k(\theta) - (\gamma(\theta)+\varepsilon)^k \right)} \longrightarrow 0,$$

ponieważ $\inf_{\zeta \in I_{j,R}} |\zeta| \longrightarrow \infty$, przy $R \longrightarrow \infty$.

Oznacza to, że dla $l = 0, 1, \dots, m-j$

$$\int_{I_{l,R}} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\int_{I_R} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

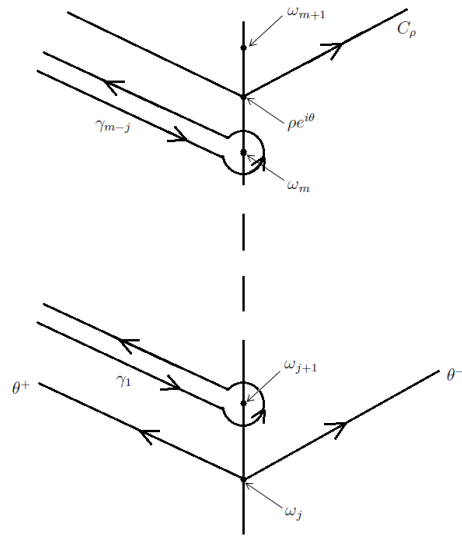
Zatem biorąc $R \longrightarrow \infty$ dostajemy (zobacz Rys.9)

$$0 = \left(\int_{\omega_j}^{e^{i\theta^+}} + \sum_{l=1}^{m-j} \int_{\gamma_l} + \int_{C_\rho} - \int_{\omega_j}^{e^{i\theta^-}} \right) \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta.$$

Stąd, dzieląc krzywą całkowania tak jak na Rysunku 9, otrzymamy

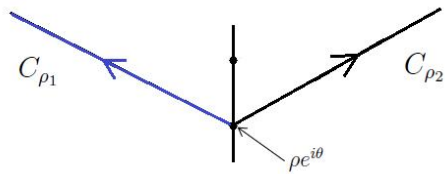
$$\mathfrak{L}^- \Phi(t) = \frac{ae_m(\omega_j/t)}{\omega_j} + \left(\int_{\omega_j}^{e^{i\theta^+}} + \int_{\gamma_1} + \dots + \int_{\gamma_{m-j}} + \int_{C_\rho} \right) \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta \\ = \mathfrak{L}^+ \Phi(t) + \sum_{r=1}^{m-j} \int_{\gamma_r} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \overset{\bullet}{l}_+^{r-1} \mu \Phi(\zeta) d\zeta + \int_{C_\rho} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \overset{\bullet}{l}_+^{m-j-1} \mu \Phi(\zeta) d\zeta.$$

Zauważmy, że $m-j$ składników sumy znajdującej się po prawej stronie powyższej równości to transformacja Laplace'a majorów zastosowana do jednorodnych składników $[\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+ \Phi]_m$ - wszystkie te całki są zbieżne, dzięki założeniu, że $[\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+ \Phi]_m \in E_{\nabla I, \gamma}(\Omega, \mathcal{L}_\theta, m)$. Ponadto pokażemy, że ostatni składnik powyższej równości jest całką zbieżną rzędu $O(e^{-N|\frac{\rho}{t}|^k})$.



Rys.9

W tym celu podzielmy krzywą C_ρ jak na Rysunku 10, wówczas



Rys.10

$$\begin{aligned}
\int_{C_\rho} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta &= - \int_{C_{\rho_1}} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta + \int_{C_{\rho_2}} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta \\
&= - \int_{\rho e^{i\theta}}^{\infty(\theta^+)} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta + \int_{\rho e^{i\theta}}^{\infty(\theta^-)} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta \\
\tilde{\zeta} = \zeta - \rho e^{i\theta} &- \int_0^{\infty(\theta^+)} \frac{e_m(\frac{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}}{t})}{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}} \widehat{\varphi}(\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}) d\tilde{\zeta} + \int_0^{\infty(\theta^-)} \frac{e_m(\frac{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}}{t})}{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}} \widehat{\varphi}(\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}) d\tilde{\zeta}.
\end{aligned}$$

Wiemy, że dla każdego $\varepsilon_1 > 0$ istnieją stałe $A_{\varepsilon_1}, B_{\varepsilon_1} > 0$ takie, że

$$\left| e_m\left(\frac{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}}{t}\right) \right| \leq A_{\varepsilon_1} e^{-\left(|\frac{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}}{t}|/B_{\varepsilon_1}\right)^k},$$

a skoro $\tilde{\zeta}$ ma kierunek bliski do kierunku θ , to możemy zapisać

$$\left| e_m\left(\frac{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}}{t}\right) \right| \leq A_{\varepsilon_1} e^{-C_k \frac{|\tilde{\zeta}|^k + |\rho e^{i\theta}|^k}{(|t|B_{\varepsilon_1})^k}}, \text{ dla stałej } C_k \text{ z Definicji 71.}$$

Ponadto, mamy, że

$$|\widehat{\varphi}(\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta})| \leq \alpha(\theta) e^{(\gamma(\theta)\tilde{\zeta})^k}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{\infty(\theta)} \frac{e_m(\frac{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}}{t})}{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}} \widehat{\varphi}(\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}) d\tilde{\zeta} \right| \\
&\leq A_{\varepsilon_1} e^{-C_k \frac{|\rho e^{i\theta}|^k}{(|t|B_{\varepsilon_1})^k}} \int_0^{\infty(\theta)} e^{-C_k \frac{|\tilde{\zeta}|^k}{(|t|B_{\varepsilon_1})^k}} \alpha(\theta) e^{(\gamma(\theta)\tilde{\zeta})^k} d\tilde{\zeta}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $t \in \bigcup_{\theta \in I} \Pi_{(\gamma(\theta) + \varepsilon)B_{\varepsilon_1} C_k^{-1/k}, \varepsilon_1, k}^\theta$ zachodzi, że

$$e^{|\tilde{\zeta}|^k \left(\gamma^k(\theta) - \frac{C_k}{(|t|B_{\varepsilon_1})^k} \right)} < e^{|\tilde{\zeta}|^k \left(\gamma^k(\theta) - (\gamma(\theta) + \varepsilon)^k \right)},$$

a stąd wynika, że całka

$$\int_0^{\infty(\theta)} e^{-C_k \frac{|\tilde{\zeta}|^k}{(|t|B_{\varepsilon_1})^k}} \alpha(\theta) e^{(\gamma(\theta)\tilde{\zeta})^k} d\tilde{\zeta} \leq C(\gamma, \varepsilon_1, k) < \infty$$

jest zbieżna.

Niech $N = C_k/B_{\varepsilon_1}^k$. Wówczas otrzymujemy, że

$$\left| \int_0^{\infty(\theta)} \frac{e_m(\frac{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}}{t})}{\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}} \widehat{\varphi}(\tilde{\zeta} + \rho e^{i\theta}) d\tilde{\zeta} \right| \leq A_{\varepsilon_1} C(\gamma, \varepsilon_1, k) e^{-N|\frac{\rho}{t}|^k},$$

czyli całka $\int_{C_\rho} \frac{e_m(\zeta/t)}{\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta$ jest rzędu $O(e^{-N|\frac{\rho}{t}|^k})$. \square

6.1. Równanie przewodnictwa cieplnego. Rozważmy ponownie równanie (12) z rozwiązaniem formalnym

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(z) t^n}{n!}.$$

Niech $\varphi \in \mathcal{O}^2\left(D \cup S_{\frac{d}{2}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup S_{\frac{d}{2}+\pi}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ oraz niech $\theta \in (d - \frac{\varepsilon}{2}, d + \frac{\varepsilon}{2})$. Wówczas z Twierdzenia 5 mamy, że

$$u^\theta(t, z) = (E_{1,\theta}g)(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}_+} (\varphi(z+s) + \varphi(z-s)) e^{\frac{-s^2}{4t}} ds$$

przy czym zastosowaliśmy zamianę zmiennych $s = \sqrt{\tilde{s}}$ oraz

$$g(\tilde{s}) = (\check{B}_1\hat{u})(\tilde{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(z)\tilde{s}^n}{(2n)!} = \frac{1}{2}(\varphi(z+\sqrt{\tilde{s}}) + \varphi(z-\sqrt{\tilde{s}})).$$

Oznaczmy $v(s) := \varphi(z+s) + \varphi(z-s)$ oraz $\tilde{\mathbb{L}}^{\frac{\theta}{2}}(v(s)) := \mathbb{L}^\theta(g(s))$, czyli z (10) mamy, że

$$\tilde{\mathbb{L}}^{\frac{\theta}{2}}(v(s)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}_+} (\varphi(z+s) + \varphi(z-s)) e^{\frac{-s^2}{4t}} ds.$$

Rozpatrzmy teraz następujące warianty.

Wariant 1. Niech $\varphi(z) = \frac{a}{z-z_0}$, dla pewnych $a, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas $v(s) = \varphi(z+s) + \varphi(z-s) = \frac{a}{z+s-z_0} + \frac{a}{z-s-z_0}$. Z definicji operatora $\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+$ dla $\theta_z := \arg(z_0 - z)$ zachodzą (zobacz Przykład 39)

$$\Delta_{e^{i\theta_z}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 2\pi ia\delta_{z_0-z},$$

$$\Delta_{e^{i(\theta_z+\pi)}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) - 2\pi ia\delta_{z-z_0}.$$

Zatem tak jak w Twierdzeniu 16 mamy, że

$$\begin{aligned} u^{2\theta_z^+}(t, z) - u^{2\theta_z^-}(t, z) &= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_z^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_z^-}(v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_z^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_z^+}(\Delta_{e^{i\theta_z}\mathbb{R}_+}^+ v(s)) \\ &= -\tilde{\mathbb{L}}^{\theta_z^+}(2\pi ia\delta_{z_0-z}) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i\theta_z}\mathbb{R}_+} (2\pi ia\delta_{z_0-z}) e^{\frac{-s^2}{4t}} ds = -i\sqrt{\frac{\pi}{t}} a e^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}}, \end{aligned}$$

a także

$$\begin{aligned} u^{2(\theta_z+\pi)^+}(t, z) - u^{2(\theta_z+\pi)^-}(t, z) &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_z+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_z+\pi)^-}(v(s)) \\ &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_z+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_z+\pi)^+}(\Delta_{e^{i(\theta_z+\pi)}\mathbb{R}_+}^+ v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_z+\pi)^+}(2\pi ia\delta_{z-z_0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i(\theta_z+\pi)}\mathbb{R}_+} (2\pi ia\delta_{z-z_0}) e^{\frac{-s^2}{4t}} ds = i\sqrt{\frac{\pi}{t}} a e^{-\frac{(z_0-z)^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Wariant 2. Niech teraz $\varphi(z) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{z}{2} \operatorname{ctgh} \left(\frac{z}{2} \right) - 1 \right) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1 \right)$.
Wtedy dla $z = 0$

$$\begin{aligned} v(s) &= \varphi(z+s) + \varphi(z-s) = \varphi(s) + \varphi(-s) = \\ &= \frac{1}{s^2} \left(\frac{s}{2} \operatorname{ctgh} \left(\frac{s}{2} \right) - 1 \right) + \frac{1}{s^2} \left(-\frac{s}{2} \operatorname{ctgh} \left(-\frac{s}{2} \right) - 1 \right) = \frac{2}{s^2} \left(\frac{s}{2} \operatorname{ctgh} \left(\frac{s}{2} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s} \operatorname{ctgh} \left(\frac{s}{2} \right) - \frac{2}{s^2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^s + 1}{e^s - 1} - \frac{2}{s^2} \end{aligned}$$

oraz dla $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \Delta_{e^{i\theta}\mathbb{R}_+}^+ v(s) &= \Delta_{e^{i\frac{\pi}{2}}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi i k} \delta_{2\pi i k} = v(s) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{2\pi i k}, \\ \Delta_{e^{i(\theta+\pi)}\mathbb{R}_+}^+ v(s) &= \Delta_{e^{i\frac{3\pi}{2}}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{\pi i k} \delta_{-2\pi i k} = v(s) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{-2\pi i k}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} u^{2\theta^+}(t, 0) - u^{2\theta^-}(t, 0) &= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^-}(v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+}(\Delta_{e^{i\theta}\mathbb{R}_+}^+ v(s)) \\ &= -\tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{2\pi i k} \right) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i\theta}\mathbb{R}_+} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{2\pi i k} \right) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{(2\pi i k)^2}{4t}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2}{t}}, \end{aligned}$$

a także

$$\begin{aligned} u^{2(\theta+\pi)^+}(t, 0) - u^{2(\theta+\pi)^-}(t, 0) &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta+\pi)^-}(v(s)) \\ &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta+\pi)^+}(\Delta_{e^{i(\theta+\pi)}\mathbb{R}_+}^+ v(s)) \\ &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta+\pi)^+} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{-2\pi i k} \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i(\theta+\pi)}\mathbb{R}_+} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{-2\pi i k} \right) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{(2\pi i k)^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{\pi^2 k^2}{t}}. \end{aligned}$$

Wariant 3. Przyjmijmy teraz, że $\varphi(z) = \frac{1}{1-e^{a-z}}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ oraz $\operatorname{Re}(a-z) \neq 0$. Wówczas $v(s) = \varphi(z+s) + \varphi(z-s) = \frac{1}{1-e^{a-z-s}} + \frac{1}{1-e^{a-z+s}}$ oraz dla $\theta_{zk} = \arg(a-z-2\pi i k)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzą

$$\begin{aligned} \Delta_{e^{i\theta_{zk}}\mathbb{R}_+}^+ v(s) &= v(s) + 2\pi i \delta_{a-z-2\pi i k}, \\ \Delta_{e^{i(\theta_{zk}+\pi)}\mathbb{R}_+}^+ v(s) &= v(s) - 2\pi i \delta_{-a+z+2\pi i k}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
u^{2\theta_{zk}^+}(t, z) - u^{2\theta_{zk}^-}(t, z) &= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_{zk}^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_{zk}^-}(v(s)) \\
&= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_{zk}^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_{zk}^+}(\Delta_{e^{i\theta_{zk}\mathbb{R}_+}}^+ v(s)) = -\tilde{\mathbb{L}}^{\theta_{zk}^+}(2\pi i\delta_{a-z-2\pi ik}) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i\theta_{zk}\mathbb{R}_+}} (2\pi i\delta_{a-z-2\pi ik}) e^{\frac{-s^2}{4t}} ds = -i\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(a-z-2\pi ik)^2}{4t}},
\end{aligned}$$

a także

$$\begin{aligned}
u^{2(\theta_{zk}+\pi)^+}(t, z) - u^{2(\theta_{zk}+\pi)^-}(t, z) &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_{zk}+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_{zk}+\pi)^-}(v(s)) \\
&= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_{zk}+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_{zk}+\pi)^+}(\Delta_{e^{i(\theta_{zk}+\pi)\mathbb{R}_+}}^+ v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_{zk}+\pi)^+}(2\pi i\delta_{-a+z+2\pi ik}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{e^{i(\theta_{zk}+\pi)\mathbb{R}_+}} (2\pi i\delta_{-a+z+2\pi ik}) e^{\frac{-s^2}{4t}} ds = i\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(-a+z+2\pi ik)^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

6.2. Uogólnienie równania przewodnictwa cieplnego. Zajmijmy się teraz ponownie równaniem (19) z rozwiązaniem formalnym

$$\hat{u}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(qn)}(z)t^{pn}}{(pn)!}.$$

Niech $1 \leq p < q$, $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\frac{q}{q-p}} \left(D \cup \bigcup_{l=0}^{q-1} S_{\frac{d_p}{q} + \frac{2\pi l}{q}} \left(\frac{\varepsilon p}{q} \right) \right)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ oraz niech $\theta \in (d - \frac{\varepsilon}{2}, d + \frac{\varepsilon}{2})$. Wtedy z Twierdzenia 7 otrzymamy, że

$$\begin{aligned} u^\theta(t, z) &= E_{\frac{p}{q-p}, \theta} \check{B}_{\frac{p}{q-p}} \hat{u}(t, z) \\ &= \frac{1}{q \sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{\frac{i\theta p}{q}} \mathbb{R}_+} \left(\varphi(z+s) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s\right) \right) C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) ds \end{aligned}$$

przy czym zastosowaliśmy zamianę zmiennych $s = \sqrt[q]{\tilde{s}^p}$ oraz

$$\begin{aligned} g(\tilde{s}, z) &= (\check{B}_{\frac{p}{q-p}} \hat{u})(\tilde{s}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(qn)}(z) (\tilde{s}^{\frac{p}{q}})^{qn}}{(qn)!} \\ &= \frac{1}{q} \left(\varphi(z + \sqrt[q]{\tilde{s}^p}) + \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} \sqrt[q]{\tilde{s}^p}\right) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} \sqrt[q]{\tilde{s}^p}\right) \right). \end{aligned}$$

Oznaczmy $v(s) := \varphi(z+s) + \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} s\right) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s\right)$ oraz $\tilde{\mathbb{L}}_{\frac{\theta p}{q}}(v(s)) := \mathbb{L}^\theta(g(s))$, czyli korzystając z (9)

$$\tilde{\mathbb{L}}_{\frac{\theta p}{q}}(v(s)) = \frac{1}{q \sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{\frac{i\theta p}{q}} \mathbb{R}_+} \left(\varphi(z+s) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s\right) \right) C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) ds.$$

Analogicznie jak w poprzednim podrozdziale rozpatrzmy następujące warianty.

Wariant 1. Niech $\varphi(z) = \frac{a}{z-z_0}$, dla pewnych $a, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wówczas

$$\begin{aligned} v(s) &= \varphi(z+s) + \varphi\left(z + e^{\frac{2\pi i}{q}} s\right) + \dots + \varphi\left(z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s\right) \\ &= \frac{a}{z+s-z_0} + \frac{a}{z + e^{\frac{2\pi i}{q}} s - z_0} + \dots + \frac{a}{z + e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}} s - z_0}. \end{aligned}$$

Z definicji operatora $\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+$ dla $\theta_{zl} := \arg(z_0 - z) - \frac{2(l-1)\pi}{q}$, gdzie $l = 1, \dots, q$, zachodzi

$$\Delta_{e^{i\theta_{zl}} \mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 2\pi i a e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} \delta_{(z_0-z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}.$$

Zatem tak jak w Twierdzeniu 16 mamy, że

$$\begin{aligned}
u_p^{\frac{q}{p}\theta^+}(t, z) - u_p^{\frac{q}{p}\theta^-}(t, z) &= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^-}(v(s)) \\
&= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+}(\Delta_{e^{i\theta_l}\mathbb{R}_+}^+ v(s)) = -\tilde{\mathbb{L}}^{\theta^+}\left(2\pi i a e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} \delta_{(z_0-z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}\right) \\
&= -\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i\theta_l}\mathbb{R}_+} \left(2\pi i a e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} \delta_{(z_0-z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}\right) C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) ds \\
&= -\frac{2\pi i a}{q\sqrt[q]{t^p}} e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{(z_0-z)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}{\sqrt[q]{t^p}}\right).
\end{aligned}$$

Wariant 2. Niech teraz $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z}{2}\operatorname{ctgh}\left(\frac{z}{2}\right) - 1\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z}{2} \cdot \frac{e^z+1}{e^z-1} - 1\right)$. Zauważmy, że funkcja $\varphi(z)$ jest funkcją parzystą, która ma bieguny 1-krotne dla $z = 2k\pi i$, gdzie $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wobec tego kierunki osobliwe to $\frac{\pi}{2}$ oraz $\frac{3}{2}\pi$. Zatem funkcja $\varphi(ze^{\frac{2l\pi i}{q}})$ ma kierunki osobliwe $\frac{\pi}{2} - \frac{2l\pi}{q}$ oraz $\frac{3}{2}\pi - \frac{2l\pi}{q}$ dla $l = 0, 1, \dots, q-1$.

Dla $z = 0$

$$\begin{aligned}
v(s) &= \varphi(z+s) + \varphi(z+e^{\frac{2\pi i}{q}}s) + \dots + \varphi(z+e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}}s) \\
&= \varphi(s) + \varphi(e^{\frac{2\pi i}{q}}s) + \dots + \varphi(e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}}s).
\end{aligned}$$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- (1) Niech q będzie liczbą nieparzystą. Wtedy $v(s) = \varphi(s) + \varphi(e^{\frac{2\pi i}{q}}s) + \dots + \varphi(e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}}s)$ ma $2q$ kierunków osobliwych postaci $\frac{\pi}{2} - \frac{2l\pi}{q}$ oraz $\frac{3}{2}\pi - \frac{2l\pi}{q}$ dla $l = 0, 1, \dots, q-1$. Pokażemy, że te $2q$ kierunki są istotnie różne między sobą. Przypuśćmy, że tak nie jest, czyli istnieją $m, k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ takie, że $\frac{\pi}{2} - \frac{2m\pi}{q} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2k\pi}{q}$. Wówczas $\frac{2(k-m)\pi}{q} = \pi$, czyli $2(k-m) = q$. Stąd otrzymujemy sprzeczność z nieparzystością liczby q .

Niech $\theta_l = \frac{\pi}{2} - \frac{2l\pi}{q}$ dla $l = 0, 1, \dots, q-1$. Wówczas

$$\Delta_{e^{i\theta_l}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{2\pi i k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k} = v(s) + e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k},$$

$$\Delta_{e^{i(\theta_l+\pi)}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{2\pi i k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k} = v(s) - e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
u_p^{\frac{q}{p}\theta_l^+}(t, 0) - u_p^{\frac{q}{p}\theta_l^-}(t, 0) &= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^-}(v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}(\Delta_{e^{i\theta_l}\mathbb{R}_+}^+ v(s)) \\
&= -\tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}\left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) = -\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i\theta_l}\mathbb{R}_+} \left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{s}{\sqrt[q]{t^p}}\right) ds \\
&= -\frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{q\sqrt[q]{t^p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}{\sqrt[q]{t^p}}\right),
\end{aligned}$$

a także

$$\begin{aligned}
u_p^{\frac{q}{p}(\theta_l+\pi)^+}(t, 0) - u_p^{\frac{q}{p}(\theta_l+\pi)^-}(t, 0) &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^-}(v(s)) \\
&= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}(\Delta_{e^{i\theta_l}\mathbb{R}_+}^+ v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}\left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) \\
&= \frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i(\theta_l+\pi)}\mathbb{R}_+} \left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) ds \\
&= \frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{q\sqrt[q]{t^p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}{\sqrt[q]{t^p}}\right).
\end{aligned}$$

- (2) Niech q będzie liczbą parzystą. Ponieważ φ jest funkcją parzystą, tzn. $\varphi(z) = \psi(z^2)$ dla pewnego ψ analitycznego w otoczeniu zera, to dla $l = 0, 1, \dots, \frac{q}{2} - 1$

$$\varphi(e^{\frac{2l\pi i}{q}} z) = \varphi(e^{\frac{2(l+\frac{q}{2})\pi i}{q}} z) = \psi(e^{\frac{4l\pi i}{q}} z^2).$$

Zatem $v(s) = 2\left(\varphi(s) + \varphi(e^{\frac{2\pi i}{q}} s) + \dots + \varphi(e^{\frac{2(\frac{q}{2}-1)\pi i}{q}} s)\right)$ ma q kierunków osobliwych postaci $\frac{\pi}{2} - \frac{2l\pi}{q}$ oraz $\frac{3\pi}{2} - \frac{2l\pi}{q}$ dla $l = 0, 1, \dots, \frac{q}{2} - 1$.

Niech $\theta_l = \frac{\pi}{2} - \frac{2l\pi}{q}$ dla $l = 0, 1, \dots, \frac{q}{2} - 1$. Wówczas

$$\Delta_{e^{i\theta_l}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 4\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{2\pi i k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k} = v(s) + e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k},$$

$$\Delta_{e^{i(\theta_l+\pi)}\mathbb{R}_+}^+ v(s) = v(s) + 4\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{2\pi i k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k} = v(s) - e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
u_p^{\frac{q}{p}\theta_l^+}(t, 0) - u_p^{\frac{q}{p}\theta_l^-}(t, 0) &= \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^-}(v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}(\Delta_{e^{i\theta_l\mathbb{R}_+}}^+ v(s)) \\
&= -\tilde{\mathbb{L}}^{\theta_l^+}\left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) = -\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i\theta_l\mathbb{R}_+}} \left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \delta_{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{s}{\sqrt[q]{t^p}}\right) ds \\
&= -\frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{q\sqrt[q]{t^p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}{\sqrt[q]{t^p}}\right),
\end{aligned}$$

a także

$$\begin{aligned}
u_p^{\frac{q}{p}(\theta_l+\pi)^+}(t, 0) - u_p^{\frac{q}{p}(\theta_l+\pi)^-}(t, 0) &= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^-}(v(s)) \\
&= \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}(\Delta_{e^{i\theta_l\mathbb{R}_+}}^+ v(s)) = \tilde{\mathbb{L}}^{(\theta_l+\pi)^+}\left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) \\
&= \frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i(\theta_l+\pi)\mathbb{R}_+}} \left(e^{-\frac{2l\pi i}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \delta_{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}\right) C_{\frac{q}{p}}(s/\sqrt[q]{t^p}) ds \\
&= \frac{e^{-\frac{2l\pi i}{q}}}{q\sqrt[q]{t^p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} C_{\frac{q}{p}}\left(\frac{-e^{-\frac{2l\pi i}{q}} 2\pi i k}{\sqrt[q]{t^p}}\right).
\end{aligned}$$

Wariant 3. Przyjmijmy teraz, że $\varphi(z) = \frac{1}{1-e^{a-z}}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ oraz $\operatorname{Re}(a-z) \neq 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}
v(s) &= \varphi(z+s) + \varphi\left(z+e^{\frac{2\pi i}{q}}s\right) + \dots + \varphi\left(z+e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}}s\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{a-z-s}} + \frac{1}{1-e^{a-z-e^{\frac{2\pi i}{q}}s}} + \dots + \frac{1}{1-e^{a-z-e^{\frac{2(q-1)\pi i}{q}}s}}.
\end{aligned}$$

Z definicji operatora $\Delta_{\mathcal{L}_\theta}^+$ dla $\theta_{zlk} := \arg(a-z-2\pi ik) - \frac{2(l-1)\pi}{q}$, gdzie $l = 1, \dots, q$, oraz $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi

$$\Delta_{e^{i\theta_{zlk}\mathbb{R}_+}}^+ v(s) = v(s) + 2\pi i a e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} \delta_{(a-z-2\pi ik)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}.$$

Zatem tak jak w Twierdzeniu 16 mamy, że

$$\begin{aligned}
u_p^{\frac{q}{p}\theta^+}(t, z) - u_p^{\frac{q}{p}\theta^-}(t, z) &= \tilde{\mathbb{L}}_{zlk}^{\theta^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}_{zlk}^{\theta^-}(v(s)) \\
&= \tilde{\mathbb{L}}_{zlk}^{\theta^+}(v(s)) - \tilde{\mathbb{L}}_{zlk}^{\theta^+}(\Delta_{e^{i\theta_{zlk}\mathbb{R}_+}}^+ v(s)) = -\tilde{\mathbb{L}}_{zlk}^{\theta^+}\left(2\pi ia e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} \delta_{(a-z-2\pi ik)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}\right) \\
&= -\frac{1}{q\sqrt[q]{t^p}} \int_{e^{i\theta_{zlk}\mathbb{R}_+}} \left(2\pi ia e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} \delta_{(a-z-2\pi ik)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}\right) C_p^q(s/\sqrt[q]{t^p}) ds \\
&= -\frac{2\pi ia}{q\sqrt[q]{t^p}} e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}} C_p^q\left(\frac{(a-z-2\pi ik)e^{-\frac{2(l-1)\pi i}{q}}}{\sqrt[q]{t^p}}\right).
\end{aligned}$$

7. UWAGI KOŃCOWE

Niniejsza praca doktorska, stanowiąca charakteryzację zjawiska Stokesa dla jednorodnych liniowych równań różniczkowych cząstkowych ze stałymi lub zmiennymi współczynnikami, których rozwiązania formalne są sumowalne we wszystkich kierunkach z wyjątkiem skończenie wielu kierunków osobliwych, otwiera wiele możliwości do dalszych badań. Oto niektóre z nich:

- (1) Następnym etapem rozważań mogłaby być generalizacja rezultatów dotyczących zagadnienia (38) na bardziej ogólne równania ze zmiennymi współczynnikami ze względu na zmienną t . Oczywiście jedną z trudności, która pojawia się przy uogólnianiu jest znalezienie postaci rozwiązań tychże równań. Intuicja podpowiada, że takie rozwiązania powinny dać się zapisać jako suma rozwiązań równań typu (38).
- (2) W naszej pracy braliśmy pod uwagę równania różniczkowe cząstkowe, których dane początkowe miały m.in. bieguny oraz punkty rozgałęzienia typu algebraicznego, naturalnym wydaje się więc w dalszych badaniach rozważać bardziej ogólne dane początkowe np. funkcje resurgentne.
- (3) Kolejnym ciekawym zagadnieniem do rozpatrzenia jest sytuacja, gdy kierunki osobliwe powstają nie w wyniku braku holomorficznego, lecz w wyniku zbyt szybkiego wzrostu do nieskończoności w danym kierunku. Pokażemy to na przykładzie danych początkowych $\varphi(z)$, które są całkowite i mają wzrost eksponencjalny rzędu 2 z wyjątkiem kierunku osobliwego $d = 0$. Wówczas kierunki $\frac{d}{2}$ oraz $\frac{d}{2} + \pi$ będą kierunkami osobliwymi rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_z^2 u \\ u(0, z) = \varphi(z). \end{cases}$$

Tego typu funkcję $\varphi(z) = f_-(z)$ można skonstruować następująco:

Niech

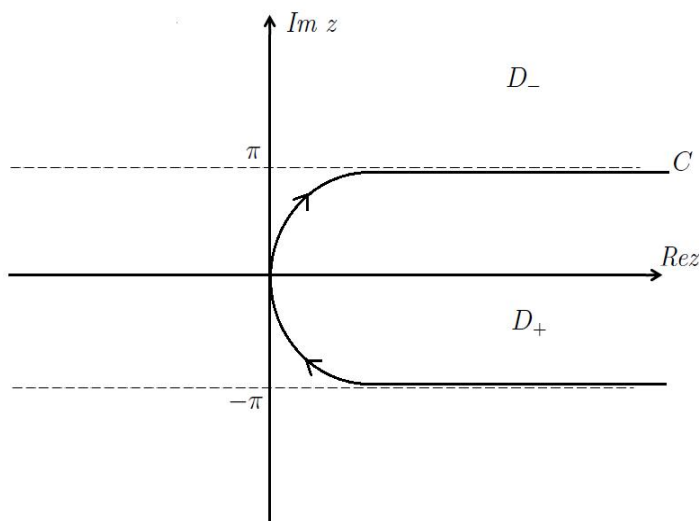
$$f_-(z) = \int_C \frac{e^{et}}{t-z} dt, \text{ dla } z \in D_-,$$

$$f_+(z) = \int_C \frac{e^{et}}{t-z} dt, \text{ dla } z \in D_+,$$

gdzie krzywa całkowania C jest przedstawiona na Rysunku 11.

Zauważmy, że obie funkcje są dobrze zdefiniowane i holomorfczne. Skoro $\text{dist}(z, C) > 0$, to pokażemy, że całka $\int_C e^{et} dt$ jest skończona. W tym celu wystarczy pokazać, że

$$\left| \int_{0+i\pi}^{\infty+i\pi} e^{et} dt \right| < \infty \text{ oraz } \left| \int_{0-i\pi}^{\infty-i\pi} e^{et} dt \right| < \infty.$$



Rys.11

Mamy, że

$$\begin{aligned}
 (\star) \quad \left| \int_{0+i\pi}^{\infty+i\pi} e^{e^t} dt \right| &= \left| \int_0^{\infty} e^{e^x+i\pi} dx \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-e^x} dx \right| \\
 &\leq \int_0^{\infty} e^{-e^x} dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.
 \end{aligned}$$

Analogicznie możemy oszacować drugą całkę.

Zauważmy, że poprzez deformację krzywej całkowania C możemy przedłużyć $f_-(z) \in \mathcal{O}(D_-)$ do funkcji całkowitej $f_-(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Ponadto dla dowolnego $d \in (0, 2\pi)$ funkcja $f_-(z) \in \mathcal{O}^2(\hat{S}_d)$, ponieważ jeżeli $z \in \hat{S}_d$ oraz $|z|$ jest odpowiednio duże, to $z \in D_-$ oraz $\text{dist}(z, C) > \varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Wówczas na podstawie (\star) otrzymamy, że funkcja $f_-(z)$ jest ograniczona przy $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \hat{S}_d$.

Co więcej z twierdzenia całkowego Cauchy'ego mamy, że dla $z \in D_+$

$$f_-(z) - f_+(z) = 2\pi i e^{e^z}.$$

Ponieważ funkcja $f_+(z)$ jest ograniczona na zbiorze $(D_+)_{-\varepsilon} := \{z \in D_+ : \text{dist}(z, C) > \varepsilon\}$, to na tym zbiorze funkcja $f_-(z)$ ma taki wzrost jak $|2\pi i e^{e^z}|$, wobec tego $f_-(z) \notin \mathcal{O}^2(\hat{S}_d)$.

LITERATURA

- [1] W. BALSER, *From divergent power series to analytic functions*, vol. 1582 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] ———, *Divergent solutions of the heat equation: on an article of Lutz, Miyake and Schäfke*, Pacific J. of Math., 188 (1999), pp. 53–63.
- [3] ———, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [4] W. BALSER AND M. YOSHINO, *Gevrey order of formal power series solutions of inhomogeneous partial differential equations with constant coefficients*, Funkcial. Ekvac., 53 (2010), pp. 411–434.
- [5] R. BOAS, *Entire Functions*, Acad. Press, New York, 1954.
- [6] A. EL KINANI AND M. OUDADESS, *Distributions Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, 2010.
- [7] K. ICHINOBE, *The Borel sum of divergent Barnes hypergeometric series and its application to a partial differential equation*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 37 (2001), pp. 91–117.
- [8] G. IMMINK, *Multisummability and the Stokes phenomenon*, J. Dyn. Control Syst., 1 (1995), pp. 483–534.
- [9] A. KANEKO, *On the structure of hyperfunctions with compact supports*, Proc. Japan Acad., II (1971), pp. 956–959.
- [10] ———, *Introduction to hyperfunctions*, vol. 3 of Mathematics and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [11] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, J. Reine Angew. Math., 191 (1953), pp. 30–49.
- [12] F. LEJA, *Funkcje analityczne i harmoniczne*, Monografie Matematyczne, Tom 29, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, 1952.
- [13] M. LODAY-RICHAUD, *Divergent Series, Summability and Resurgence II*, vol. 2154 of Lecture Notes in Mathematics, Springer International Publishing, Cham, 2016.
- [14] D. LUTZ, M. MIYAKE, AND R. SCHÄFKE, *On the Borel summability of divergent solutions of the heat equation*, Nagoya Math. J., 154 (1999), pp. 1–29.
- [15] S. MALEK, *On the Stokes phenomenon for holomorphic solutions of integro-differential equations with irregular singularity*, J. Dyn. Control Syst., 14 (2008), pp. 371–408.
- [16] S. MICHALIK, *On Borel summable solutions of the multidimensional heat equation*, Ann. Polon. Math., 105 (2012), pp. 167–177.
- [17] ———, *Analytic solutions of moment partial differential equations with constant coefficients*, Funkcial. Ekvac., 56 (2013), pp. 19–50.
- [18] ———, *Summability of formal solutions of linear partial differential equations with divergent initial data*, J. Math. Anal. Appl., 406 (2013), pp. 243–260.
- [19] S. MICHALIK AND B. PODHAJECKA, *The Stokes phenomenon for certain partial differential equations with meromorphic initial data*, Asymptot. Anal., 99 (2016), pp. 163–182.
- [20] S. MICHALIK AND B. TKACZ, *The Stokes phenomenon for some moment partial differential equations*, J. Dyn. Control Syst., 25 (2019), pp. 573–598.
- [21] C. MITSCHI AND D. SAUZIN, *Divergent Series, Summability and Resurgence I*, vol. 2153, Springer International Publishing, Cham, 2016.

- [22] M. MIYAKE, *Borel summability of divergent solutions of the Cauchy problem to non-Kovaleskian equations*, in *Partial Differential Equations and Their Applications*, World Scientific, 1999, pp. 225–239.
- [23] B. Y. STERNIN AND V. E. SHATALOV, *Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [24] G. STOKES, *On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments*, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 10 (1864), pp. 106–128.
- [25] Z. SZMYDT AND B. ZIEMIAN, *Topological Imbedding of Laplace Distributions in Laplace Hyperfunctions*, vol. 346 of *Dissertationes Mathematicae*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1998.
- [26] B. TKACZ, *The Stokes Phenomenon for Certain PDEs in a Case When Initial Data Have a Finite Set of Singular Points*, in *Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations. FASdiff 2017*, vol. 256 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2018, pp. 79–93. (arXiv:1805.11410).
- [27] ———, *The Stokes Phenomenon or certain partial differential equations with variable coefficients depending on time variable*, in *Complex Differential and Difference Equations*, *De Gruyter Proceedings in Mathematics*, 2020, pp. 419–434. (arXiv:2206.12627).