Kombinatoryka w przestrzeniach Banacha

WYKŁADY 1–8

wykład dra Tomasza Kochanka
spisał Przemysław Ohrysko

1 Wykłady 1-2

1.1 Klasyczne twierdzenie Ramseya i modele rozciągnięte

Wprowadzimy na początek użyteczne oznaczenia.

Oznaczenia 1.1.1. *Niech M będzie dowolnym zbiorem. Przez $[M]^{<\infty}$, $[M]^{\infty}$, $[M]^r$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich skończonych, nieskończonych, r-elementów podzbiorów zbioru M (odpowiednio). c_{00} będzie oznaczać przestrzeń liniową ciągów równych zero poza skończoną liczbą indeksów.*

Definicja 1.1.2. Niech r będzie liczbą naturalną oraz $f : [\mathbb{N}]^r \mapsto \mathbb{R}$ funkcją ograniczoną. Wówczas

$$\lim_{A\in[M]^r} f(A) = \alpha \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \underset{\substack{A\in[M]^r \\ N\leqslant \min A}}{\forall} |f(A)-\alpha| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 1.1.3 (Klasyczne twierdzenie Ramseya)**.** *Niech $r \in \mathbb{N}$ oraz niech $f : [\mathbb{N}]^r \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wówczas istnieje zbiór $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ taki, że*

$$\lim_{A\in[M]^r} f(A) \text{ isnieje.}$$

W szczególności, jeśli $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^r$, to istnieje $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ takie, że $[M]^r \subset \mathcal{A}$ lub $[M]^r \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Istotnie, wystarczy położyć $f_{\mathcal{A}}$, $\varepsilon < 1$ i wyrzucić ze zbioru M liczby naturalne mniejsze od otrzymanego N.

Dowód. Dla $r = 1$ jest to twierdzenie Bolzano - Weierstrassa (z ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny). Będziemy dowodzić przez indukcję, więc załóżmy prawdziwość twierdzenia dla $r-1$. Przyjmijmy

$$f(m_1,\ldots,m_r) = f(\{m_1,\ldots,m_r\}).$$

Dla ustalonych $m_1,\ldots,m_{r-1}$ znajdziemy zbiór $M_1 \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ taki, że granica

$$g(m_1,\ldots,m_{r-1}) := \lim_{m_r\in M_1} f(m_1,\ldots,m_{r-1},m_r)$$

istnieje (zbiór twierdzenie Bolzano - Weierstrassa). Możemy założyć, że zbiór M_1 jest taki, iż powyższa granica istnieje dla wszystkich układów $r-1$ liczb naturalnych $\{m_1, \ldots, m_{r-1}\}$ (mamy przeliczalnie wiele ciągów i stosujemy metodę przekątniową). Otrzymujemy w ten sposób odwzorowanie $g : [\mathbb{N}]^{r-1} \mapsto \mathbb{R}$, które jest ograniczone, bo funkcja f jest ograniczona. Korzystamy z założenia indukcyjnego, aby znaleźć zbiór nieskończony $M_2 \subset M_1$ taki, że (tak naprawdę łatwo widać, iż obecne sformułowanie twierdzenia jest równoważne sformułowaniu z zastąpieniem $\mathbb{N}$ przez dowolny zbiór nieskończony i stosujemy tę obserwację)

$$\lim_{A \in [M_2]^{r-1}} g(A) = \alpha.$$

Z definicji g dla dowolnego $A \in [M_2]^{r-1}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $N = N(A, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, żę dla $n \geqslant N(A, \varepsilon)$ mamy $n \notin A$ oraz

$$|f(A \cup \{n\}) - g(A)| < \varepsilon.$$

Przystępujemy teraz do określenia zbioru M. Niech m_1 będzie dowolnym elementem zbioru M_2 i załóżmy, że mamy wybrane liczby naturalne $m_1, \ldots, m_n$. Bierzemy $m_{n+1} > m_n$, $m_{n+1} \in M_1$ takie, że

$$m_{n+1} > \max_{A \in [\{m_1, \ldots, m_n\}]^{r-1}} N(A, 2^{-n}).$$

Sprawdzimy, że $M = \{m_1, m_2, \ldots\} \subset M_1$ spełnia tezę twierdzenia, czyli uzasadnimy

$$\lim_{A \in [M]^r} f(A) = \alpha.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $n \in \mathbb{N}$ tak, aby spełnione były warunki:

1. jeśli $A \in [M]^{r-1}$ i $m_n \leqslant \min(A)$, to $|g(A) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$
2. $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$

Wówczas, jeśli $A \in [M]^r$ i $m_n \leqslant \min(A)$, $A = \{m_j < \ldots < m_k\}$, $B = A \setminus \{m_k\}$, to

$$|f(A) - g(B)| \leqslant 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem,

$$|f(A) - \alpha| \leqslant |f(A) - g(B)| + |g(B) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Następujący przykład pokazuje, że klasyczne twierdzenie Ramseya nie przenosi się na przypadek funkcji określonych na nieskończonych podzbiorach $\mathbb{N}$.

Przykład 1.1.4. Weźmy dowolny ultrafiltr niegłówny $\mathcal{U} \subset [\mathbb{N}]^\infty$ i określmy $c : [\mathbb{N}]^\infty \mapsto \{-1, 1\}$ za pomocą wzoru

$$c(A) = \lim_{\mathcal{U}} (-1)^{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}.$$

Wówczas c nie jest stała na żadnym zbiorze $[M]^\infty$ dla $M \subset \mathbb{N}$ nieskończonego. Istotnie, dla dowolnego A mamy $c(A) \neq c(A \setminus \{\min A\})$.

Definicja 1.1.5. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni Banacha X nazywa się spreading, gdy

$$\forall_{0<p_1<\ldots<p_n} \forall_{a_1,\ldots,a_n\in K} \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_{p_j}\| = \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|$$

Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest asymptotycznie spreading, jeśli istnieje istnieje ciąg spreading $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ (być może w innej przestrzeni Banacha) o własności

$$\forall_{a_1,\ldots,a_r\in K} \lim_{\{p_1<\ldots<p_n\}\in[\mathbb{N}]^r} \|\sum_{j=1}^{r} a_j x_{p_j}\| = \|\sum_{j=1}^{r} a_j e_j\|.$$

Jeśli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest dodatkowo ciągiem bazowym, to powyższy ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywa się spreading model ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Twierdzenie 1.1.6 (Brunel,Sucheston,1974)**.** *Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ będzie unormowanym ciągiem takim, że $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest relatywnie zwarty. Wówczas istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, który jest asymptotycznie spreading.*

Dowód. Możemy założyć, że żaden podciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny (wyrzucamy zbieżne podciągi). Z twierdzenia Ramseya

$$\forall_{M\in[\mathbb{N}]^{\infty}} \exists_{M_1\in[M]^{\infty}} \lim_{\{p_1<\ldots<p_r\}\in[M_1]^r} \|\sum_{j=1}^{r} a_j x_{p_j}\|$$

istnieje dla ustalonego ciągu skalarów $(a_1,\ldots,a_r)$. Stosując standardowe metody, można wybrać zbiór $M_{\infty} \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ odpowiedni dla wszystkich wyborów $(a_1,\ldots,a_r)$ i dla każdego $r \in \mathbb{N}$ (najpierw robimy to dla a_i wymiernych).
Dla ciągu $\xi = (\xi(j))_{j\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ określamy

$$\|\xi\|_Y = \lim_{\{p_1<\ldots<p_n\}\in[M_{\infty}]^r} \|\sum_{j=1}^{r} \xi(j) x_{p_j}\|_X, \text{ gdy } \xi = (\xi(1),\ldots,\xi(r),0,0,\ldots).$$

Nietrudno sprawdzić, że jest to półnorma o własności spreading (to znaczy, że ciąg kanonicznych wektorów bazowych $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ma własność spreading). Pokażemy teraz, iż w istocie jest to norma. Niech $\|\xi\|_Y = 0$, gdzie

$$\xi = \sum_{j=1}^{r} a_j e_j, \ a_r \neq 0.$$

Wówczas

$$\|\sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j + a_r e_r\|_Y = 0.$$

Z własności spreading

$$\|\sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j + a_r e_{r+1}\|_Y = 0.$$

Z nierówności trójkąta dostajemy $\|e_r - e_{r+1}\|_Y = 0$, co z własności spreading daje $\|e_1 - e_2\|_Y = 0$, ale

$$0 = \|e_1 - e_2\| = \lim_{\{p_1<p_2\}\in[M_\infty]^2} \|x_{p_1} - x_{p_2}\|$$

Oznacza to jednak, że pewien podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego, co przeczy założeniu. W związku z tym możemy przyjąć za przestrzeń Y uzupełnienie c_{00} w podanej normie i wtedy ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest spreding, czyli odpowiedni podciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest asymptotycznie spreading (dokładniej, jest to $(x_n)_{n\in M_\infty}$). $\square$

1.2 Nieskończone twierdzenie Ramseya. Topologia Ellentucka.

Oznaczenia 1.2.1. *Skończone podzbiory $\mathbb{N}$ będziemy oznaczać przez $a, b, \ldots$, a nieskończone przez $A, B, \ldots$. Dodatkowo, dla dwóch podzbiorów a i A liczb naturalnych będziemy pisać $a < A$ dla wyrażenia, iż wszystkie elementy zbioru a są mniejsze niż wszystkie elementy zbioru A.*

Definicja 1.2.2. Przyjmijmy

$$[s, M] = \{N \in [\mathbb{N}]^\infty : s \subset N \subset s \cup M, s < N \setminus s\}.$$

Topologią Ellentucka na $[\mathbb{N}]^\infty$ będziemy nazywać topologię, w której zbiory postaci $[s, M]$ są bazą.

Odnotujmy najpierw prosty fakt dotyczący topologii Ellentucka. Przede wszystkim, zauważmy, że na $[\mathbb{N}]^\infty$ mamy topologię produktową dziedziczoną z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (utożsamiamy zbiór $A \in [\mathbb{N}]^\infty$ z funkcją $f : \mathbb{N} \mapsto \{0,1\}$, $f(n) = \chi_A(n)$.

Fakt 1.2.3. *Topologia Ellentucka jest bogatsza niż topologia produktowa. Topologię Ellentucka można także wprowadzić za pomocą bazy składającej się zbiorów*

$$[s, M]^\sim = \{N \in [\mathbb{N}]^\infty : s \subset N \subset s \cup M\}.$$

Definicja 1.2.4. Rodzinę $\mathcal{V} \subset [\mathbb{N}]^\infty$ będziemy nazywać całkowicie Ramseyowską (dobrym kolorowaniem), gdy

$$\underset{s\in[\mathbb{N}]^{<\infty}}{\forall}\ \underset{M\in[\mathbb{N}]^\infty}{\forall}\ \underset{N\in[M]^\infty}{\exists} \left([s, N] \subset \mathcal{V} \text{ lub } [s, N] \cap \mathcal{V} = \emptyset\right).$$

Przypomnimy jeszcze definicję topologiczną.

Definicja 1.2.5. Niech V będzie podzbiorem pewnej przestrzeni topologicznej. Powiemy, że V ma własność Baire'a, gdy istnieje zbiór otwarty O oraz zbiór pierwszej kategorii M takie, że

$$V = O \triangle M = (O \setminus M) \cup (M \setminus O).$$

Twierdzenie 1.2.6 (Ellentuck,1974)**.** *Rodzina $\mathcal{V} \subset [\mathbb{N}]^{\infty}$ jest całkowicie Ramseyowska wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{V}$ ma własność Baire'a w topologii Ellentucka.*

Dowód. Dowód podzielimy na kilka części.
0. Jeśli $\mathcal{V}$ jest całkowicie Ramseyowski, to $\mathcal{V}$ ma własność Baire'a (to jest zadanie na ćwiczenia).
1. (Nash - Williams, 1965). *Każdy zbiór otwarty w topologii Ellentucka jest całkowicie Ramseyowski.* Ustalmy $\mathcal{U} \subset [\mathbb{N}]^{\infty}$, $\mathcal{U}$ - otwarty. Wprowadzimy na początek pewną konwencję: dla $a \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ i $E \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ powiemy, że para (a, E) jest "dobra", gdy istnieje $M \in [E]^{\infty}$ o własności $[a, M]^{\sim} \subset \mathcal{U}$. W przeciwnym razie powiemy, że para (a, E) jest "zła".
Dążymy do stwierdzenia:

$$\text{Jeśli para } (a, E) \text{ jest zła, to istnieje } M \in [E]^{\infty} \text{ takie, że } [a, M]^{\sim} \cap \mathcal{U} = \emptyset. \quad (1)$$

Załóżmy, że wykazaliśmy następujące zdanie.

$$\text{Jeśli } (a, E) \text{ jest zła, to } \underset{M \in [E]^{\infty}}{\exists} \underset{a \subset b \subset a \cup M}{\forall} (b, M) \text{ też jest zła.} \quad (2)$$

Chcąc wywnioskować (1) załóżmy, że para (a, E) jest zła oraz dla każdego $M \in [E]^{\infty}$ mamy $[a, M]^{\sim} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Wówczas dla dowolnego $M \in [E]^{\infty}$ znajdziemy zbiór $\emptyset \neq G \in [a, M]^{\sim} \cap \mathcal{U}$ i w szczególności, $a \subset G$. Skoro $\mathcal{U}$ jest otwarty, to istnieje $c \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$ oraz $H \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ takie, że $G \in [c, H]^{\sim} \subset \mathcal{U}$. Teraz $[c, G]^{\sim} \subset [c, H]^{\sim}$, bo dla $X \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ jeśli $c \subset X \subset G \cup c$, to $X \subset H \cup c$, gdyż $G \subset H \cup c$ (to wynika z $G \in [c, H]^{\sim}$). Przyjmijmy teraz $b = a \cup c$. Wówczas $[b, G]^{\sim} \subset [c, G]^{\sim}$. Istotnie, jeżeli $b = a \cup c \subset X \subset G \cup b = G \cup a \cup c$, to $c \subset X$ oraz $X \subset G \cup c$, bo $a \subset G$. W ten sposób znaleźliśmy zbiór skończony b taki, że $a \subset b$ oraz $[b, G]^{\sim} \subset \mathcal{U}$. Zwróćmy jeszcze uwagę, iż $G \cap M$ jest zbiorem nieskończonym (wynika to z $G \subset M \cup a$) oraz $[b, M \cap G]^{\sim} \subset [b, G]^{\sim}$. Zatem para (b, M) jest dobra, co jest zaprzeczeniem (2).
Przechodzimy do dowodu (2). Wykażemy najpierw fakt pomocniczy:

jeśli $(a_j)_{j=1}^{m}$ są zbiorami skończonymi takimi, że (a_j, E) są złe, to

$$\underset{v \in E \setminus \cup_{j=1}^{m} a_j}{\exists} \ \underset{F \in [E]^{\infty}}{\exists} \ \underset{1 \leqslant j \leqslant m}{\forall} (a_j \cup \{v\}, F) \text{ są złe.}$$

Załóżmy przeciwnie. Wówczas

$$\underset{v \in E \setminus \cup_{j=1}^{m} a_j}{\forall} \ \underset{1 \leqslant j \leqslant m}{\exists} (a_j \cup \{v\}, E) \text{ jest dobra,}$$

czyli

$$\underset{p \in \{1, \dots, m\}}{\exists} \ \underset{E_1 \in [E]^{\infty}}{\exists} [a_p \cup \{v\}, E_1]^{\sim} \subset \mathcal{U}.$$

Niech $v_1 \in E \setminus \cup_{j=1}^{m} a_j$ będzie ustalone i dobierzmy do niego indeks $p(1)$ oraz zbiór E_1 jak wyżej. Weźmy teraz dowolne $v_2 > v_1$ spełniające $v_2 \in E_1 \setminus \cup_{j=1}^{m} a_j$

otrzymując indeks $p(2)$ oraz zbiór $E_2 \in [E_1]^\infty$ taki, że $[a_{p(2)} \cup \{v_2\}, E_2]^\sim \subset \mathcal{U}$. Kontynuujemy naszą konstrukcję otrzymując rosnący ciąg nieskończony v_k. Zakres wartości, które przebiega $p(k)$ jest jednak skończony, więc pewna liczba $p_0 \in \{1, \ldots, m\}$ pojawi się nieskończenie wiele razy. Niech $M = \{v_k : k \in \mathbb{N}$ takich, że $p(k) = p_0\}$. Teraz zauważmy, że $[a_{p_0}, M]^\sim \subset \mathcal{U}$, co przeczy założeniu, iż wszystkie pary (a_j, E) są złe. Istotnie, niech $X \in [a_{p_0}, M]^\sim$. Wówczas $a_{p_0} \subset X \subset a_{p_0} \cup M$ i niech k będzie minimalnym indeksem, dla którego $v_k \in X$. Teraz $a_{p_0} \cup \{v_k\} \subset X \subset a_{p_0} \cup \{v_k\} \cup E_k$, ostatnie zawieranie wynika stąd, że $G \subset a_{p_0} \cup M$, a więc

$$G \setminus a_{p_0} = \{v_k\} \bigcup_{l=1}^{\infty} \{v_{n_l} : v_{n_l} \in M\} \; n_l > k \text{ dla } l \in \mathbb{N}.$$

Jednakże $v_{n_l} \in E_{n_l}$ oraz $E_{n_l} \subset E_k$ dla $l \in \mathbb{N}$, bo zbiory ciąg zbiorów $(E_i)_{i=1}^\infty$ jest zstępujący. Pamiętając, że $p_0 = p(k)$ otrzymujemy $G \in [a_{p(k)}, E_k]^\sim \subset \mathcal{U}$.
Zakończymy teraz dowód (2). Niech więc para (a, E) będzie zła i połóżmy $E_0 = E$. Korzystając z faktu pomocniczego znajdujemy $v_1 \in E_0$ oraz zbiór $E_1 \in [E_0]^\infty$ taki, że para $(a \cup \{v_1\}, E_1)$ jest zła. Zauważmy, że również para (a, E_1) jest zła (w przeciwnym razie para (a, E) byłaby dobra). Kontynuując, wybierzmy $v_2 \in E_1$, $v_2 > v_1$ oraz $E_2 \in [E_1]^\infty$ tak, że $(a \cup \{v_2\}, E_2)$ oraz $(a \cup \{v_1, v_2\}, E_2)$ są złe. Zwróćmy uwagę, iż również pary $(a \cup \{v_1\}, E_2)$, (a, E_2) są złe (inaczej $(a \cup \{v_1\}, E_1)$ lub (a, E_1) byłaby zła), czyli dla każdego b spełniającego $a \subset b \subset a \cup \{v_1, v_2\}$ para (b, E_2) jest zła. W końcu dostaniemy ciąg rosnący $(v_k)_{k=1}^\infty$ o własnościach $v_k \in E_{k-1}$, $E_k \in [E_{k-1}]^\infty$ i (b, E_k) są wszystkie złe dla zbiorów b spełniających $a \subset b \subset a \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$. Przyjęcie $M = \{v_1, v_2, \ldots\}$ kończy dowód (2) i jednocześnie całego punktu **1.**.
2. Jeśli $\mathcal{V}$ jest pierwszej kategorii w topologii Ellentucka, to

$$\forall_{[a,A]} \; \exists_{B \in [a,A]} \; [a, B] \cap \mathcal{V} = \emptyset.$$

W szczególności każdy zbiór pierwszej kategorii w topologii Ellentucka jest nigdzie gęsty. To jest zadanie na ćwiczenia.
3. Niech $\chi \subset [\mathbb{N}]^\infty$ ma własność Baire'a. Istnieją wtedy zbiór otwarty O oraz zbiór pierwszej kategorii M takie, że $\chi \triangle O = M$ (sztuczka z teorii mnogości). Ustalmy zbiór $[s, A]$. Z punktu 2. istnieje $N \in [s, A]$ takie, że $[s, N] \cap M = \emptyset$. Z części 1. zbióe O jest całkowicie Ramseyowski, więc istnieje $P \in [s, N]$ takie, że

$$[s, P] \subset O \text{ lub } [s, P] \cap O = \emptyset.$$

Dalej, jeśli $[s, P] \subset O$, to $[s, P] \cap M = \emptyset$. Istotnie, jest to rozważana już przy dowodzie (2) sytuacja, a mianowicie: gdy $P \in [s, N]$ i $[s, N] \cap M = \emptyset$, to $[s, P] \subset [s, N]$, w szczególności $[s, P] \cap M = \emptyset$. Zatem $[s, P] \subset O \setminus M \subset \chi$.
Gdy zaś $[s, P] \cap O = \emptyset$, to pamiętając, że $[s, P] \subset [s, N]$ mamy $[s, P] \cap M = \emptyset$, a więc $[s, P] \cap (O \cup M) = \emptyset$. Ostatecznie $\chi \subset O \cup M$, co prowadzi do $[s, P] \cap \chi = \emptyset$ i kończy dowód twierdzenia Ellentucka. $\square$

1.3 Twierdzenie ℓ_1-Rosenthala.

Zanim przejdziemy do tematu tej części wykładu podamy twierdzenie i definicje używane w dowodzie twierdzenia Rosenthala.

Twierdzenie 1.3.1 (Kadec-Pełczyński)**.** *Dla ograniczonego zbioru $S \subset X$ takiego, że $0 \notin \overline{S}$ następujące warunki są równoważne.*

1. *S nie zawiera żadnego ciągu bazowego.*
2. *S jest warunkowo słabo zwarty i $0 \in \overline{S}^w$.*

Definicja 1.3.2. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem w przestrzeni Banacha X oraz niech $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Określamy oscylację ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ na zbiorze M za pomocą wzoru

$$\operatorname{osc}(M) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k \\ m,n\in M}} |x^*(x_m) - x^*(x_n)|.$$

Definicja 1.3.3. Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni Banacha X jest słabym ciągiem Cauchy'ego, gdy dla każdego $x^* \in X^*$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n).$$

Definicja 1.3.4. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami bazowymi w przestrzeniach Banacha X oraz Y (odpowiednio). Powiemy, że ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ są równoważne $(x_n) \sim (y_n)$, gdy dla dowolnego układu skalarów a_i

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ zbiega } \Leftrightarrow \text{ szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ zbiega.}$$

Z twierdzenia o wykresie domkniętym jest to równoważne istnieniu odwracalnego operatora liniowego $T : [x_n]_{n=1}^{\infty} \mapsto [y_n]_{n=1}^{\infty}$ takiego, że $Tx_n = y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$

Możemy już przejść do sformułowania i dowodu twierdzenia ℓ_1 Rosenthala.

Twierdzenie 1.3.5 (Rosenthal 1974,Dor 1975)**.** *Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie unormowanym ciągiem w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha X. Wówczas zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera słaby podciąg Cauchy'ego.*
2. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera podciąg bazowy równoważny bazie kanonicznej w ℓ_1.*

Dowód. Załóżmy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie zawiera żadnego słabego podciągu Cauchy'ego. Rozumowanie podzielimy na kilka etapów.
1. Zbiór $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ oczywiście nie jest warunkowo słabo zwarty, więc przechodząc do podciągu i korzystając z twierdzenia Kadeca - Pełczyńskiego możemy przyjąć, iż $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem bazowym.
2. Z założenia, iż $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie zawiera żadnego słabego podciągu Cauchy'ego

wynika $\operatorname{osc}(M) > 0$. Zauważmy, że dla $M \subset N$ mamy osc(M) $\leqslant$ oscN. Dążymy do dowodu istnienia $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ spełniającego

$$\operatorname{osc}(M) = \inf_{M' \in [M]^\infty} \operatorname{osc}(M'), \text{ czyli } \underset{M', M'' \in [M]^\infty}{\forall} \operatorname{osc}(M') = \operatorname{osc}(M'').$$

Połóżmy $M_0 = \mathbb{N}$. Krok po kroku znajdziemy ściśle zstępujący ciąg nieskończonych podzbiorów $(M_k)_{k=0}^\infty$ o własności

$$0 < \operatorname{osc}(M_k) < \inf_{M' \in [M_{k-1}]^\infty} + \frac{1}{k} \text{ dla } k \in \mathbb{N}.$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zbiór $M_{k-1} \setminus M_k$ jest niepusty, więc weźmy $x_k \in M_{k-1} \setminus M_k$. Są to zbiory parami rozłączne, zatem określając $M = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ otrzymujemy zbiór nieskoćzony. Ponadto dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $M \setminus M_k = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. Oscylacja nie zmienia się przy zamianie skończenie wielu elementów, co prowadzi do

$$c \leqslant \operatorname{osc}(M) \leqslant \operatorname{osc}(M_k) < \inf_{M' \in [M_{k-1}]^\infty} + \frac{1}{k} \leqslant \inf_{M' \in [M]^\infty} + \frac{1}{k} \; k \in \mathbb{N}.$$

Zatem

$$\operatorname{osc}(M) = \inf_{M' \in [M]^\infty} .$$

Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $M = \mathbb{N}$. Niech $\operatorname{osc}(M') = 4\delta > 0$. Co więcej, wybierając kolejny podciąg możemy przyjąć, iż dla pewnego $u^* \in B_{X^*}$ istnieje poniższa granica

$$\lim_{n \to \infty} u^*(x_n) =: \theta, \; |\theta| > \delta,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z definicji oscylacji, nierówności trójkąta oraz określenia liczby δ.

3. Niech $(x_n, x_n^*)_{n=1}^\infty$ będzie układem biortogonalnym. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\|x_n\| \cdot \|x_n^*\| \leqslant 2K, \text{ gdzie } K \text{ jest stałą bazową ciągu } (x_n)_{n=1}^\infty.$$

Zbiór $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ jest oczywiście oddzielony od zera, a więc istnieje stała B taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\|x_n^*\| \leqslant B.$$

Wprowadźmy rodzinę zbiorów

$$\mathcal{V} = \{M \in [\mathbb{N}]^\infty : M = \{m_1 < m_2 < \ldots\} \text{ i istnieje } x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant C$$
$$\text{takie, że } x^*(x_{m_j}) = (-1)^j \text{ dla } j \in \mathbb{N}\}$$

Uzasadnimy, że $\mathcal{V}$ jest domknięte w topologii produktowej na $[\mathbb{N}]^\infty$. Weźmy więc ciąg $(M_v)_{v=1}^\infty \subset \mathcal{V}$ (można ograniczyć się do ciągów przeliczalnych, bo ta topologia jest metryzowalna) i załóżmy, że

$$M_v \to M_0 \in [\mathbb{N}]^\infty \text{ przy } v \to \infty$$

w topologii produktowej. Z definicji oznacza to, że

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \chi_{M_v}(n) \to \chi_{M_0}(n) \text{ przy } v \to \infty. \tag{3}$$

Niech $M_0 = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$. Uzasadnimy, iż

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} \exists_{N} \forall_{v>N} m_j = \min(M_v \setminus \{m_1, \ldots, m_{j-1}\}).$$

Ograniczymy się do $j = 1$ (dalsze rozumowanie jest analogiczne). Weźmy $n < m_1$. Wówczas z (3)

$$\exists_{N_1\in\mathbb{N}} \forall_{v>N_1} n \notin M_v.$$

Liczb spełniających warunek $n < m_1$ jest jednak skończenie wiele, a więc w istocie

$$\exists_{N_2\in\mathbb{N}} \forall_{n<m_1} \forall_{v>N_2} n \notin M_v.$$

Z drugiej strony

$$\exists_{N_3\in\mathbb{N}} \forall_{v>N_3} m_1 \in M_v.$$

Kładąc $N = \max\{N_2, N_3\}$ otrzymujemy żądaną własność. Z definicji zbiorów M_v możemy napisać

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{v>N} x_v^*(x_{m_j}) = (-1)^j. \tag{4}$$

Niech $(x_v^*)_{v=1}^{\infty} \in CB_{X^*}$ będą funkcjonałami występującymi w definicji zbiorów M_v. Z twierdzenia Banacha-Alaoglu zbiór $\{x_v^* : v \in \mathbb{N}\}$ ma słaby* punkt skupienia, który oznaczymy przez x_0^*. Ustalmy $j \in \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon > 0$. Wówczas w zbiorze

$$\{x^* \in X^* : |x_0^*(x_{m_j}) - x^*(x_{m_j})|\} < \varepsilon$$

znajdziemy podciąg $(x_{v_k}^*)_{k=1}^{\infty}$ (to jest definicja punktu skupienia). Z (4) istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie , że

$$x_{v_k}^*(x_{m_j}) = (-1)^j.$$

Stąd

$$|x_0^*(m_j) - (-1)^j| < \varepsilon,$$

a ponieważ $\varepsilon > 0$ oraz $j \in \mathbb{N}$ były dowolne dostajemy

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} x_0^*(m_j) = (-1)^j.$$

Zatem $M_0 \in \mathcal{V}$ i pamiętając, że topologia Ellentuka jest bogatsza niż topologia produktowa udowodniliśmy domkniętość $\mathcal{V}$ w topologii Ellentucka. Z twierdzenia Nasha - Williamsa wynika całkowita Ramseyowskość $\mathcal{V}$ (dopełnienie zbioru domkniętego jest otwarte, a klasa zbiorów całkowicie Ramseyowskich jest zamknięta na dopełnienia). Z definicji,

$$\exists_{M\in[\mathbb{N}]^{\infty}} ([M]^{\infty} \cap \mathcal{V} = \emptyset) \text{ lub } ([M]^{\infty} \subset \mathcal{V}).$$

Wykluczymy teraz pierwszą możliwość. Ustalmy więc $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Chcemy znaleźć $M' \in [M]^\infty$ spełniające $M' \in \mathcal{V}$. Z części **2.** wiemy, że osylacja ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ na dowolnym nieskończonym podzbiorze jest równa 4δ. Niech $M = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$. Ciągi $(y^*(x_{2n_j}))_{j=1}^\infty$, $(y^*(x_{2n_j+1}))_{j=1}^\infty$ są dla dowolnego $y^* \in B_{X^*}$ ograniczonymi ciągami liczbowymi, więc możemy wybrać wspólny podciąg $(v_j)_{j=1}^\infty$ taki, że (przyjmujemy $m_{2j} = 2v_j$ oraz $m_{2j-1} = 2v_j + 1$)

$$\lim_{j\to\infty} y^*(x_{m_{2j}}) = \alpha \text{ i } \lim_{j\to\infty} y^*(x_{m_{2j+1}}) = \beta.$$

Ponadto możemy tak dobrać funkcjonał $y^* \in B_{X^*}$ i podciągi, aby $|\alpha - \beta| > 2\delta$. Istotnie, mamy $\operatorname{osc}(N) = 4\delta$, a więc z definicji oscylacji istnieje funkcjonał $y^* \in B_{X^*}$ taki, że

$$\forall_{k>K} \ \exists_{\substack{m,n>k\\ m,n\in N}} |y^*(x_n) - y^*(x_m)| > 2\delta.$$

dla $k > K$ oznaczmy przez $t_k \in N$ oraz $l_k \in N$ indeksy, dla których zachodzi powyższa nierówność. W ten sposób otrzymujemy

$$\forall_{k>K} |y^*(x_{t_k}) - y^*(x_{l_k})| > 2\delta.$$

Wybierjąc wspólnie podciągi zbieżne możemy założyć, iż $(x_{t_k})_{k=1}^\infty$, $(x_{l_k})_{k=1}^\infty$ są zbieżne do α i β (odpowiednio). Nadto, usuwając stosownie elementy możemy przyjąć, że $m_{2j} = l_j$ oraz $m_{2j+1} = t_j$.
Użyjemy teraz znalezionego w punkcie **2.** funkcjonału u^*. Rozważmy funkcjonał

$$v^* = \frac{2}{\alpha - \beta} y^* - \frac{\alpha + \beta}{\theta(\alpha - \beta)}.$$

Teraz

$$\lim_{j\to\infty} v^*(x_{m_{2j}}) = \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = 1 \text{ oraz podobnie}$$
$$\lim_{j\to\infty} v^*(x_{m_{2j+1}}) = -1,$$

czyli

$$c_j := v^*(x_{m_j}) - (-1)^j \to 0 \text{ przy } j \to \infty$$

Przechodząc do podciągu możemy założyć $|c_j| \leqslant 2^{-j} B^{-1}$ dla $j \in \mathbb{N}$. Szacując normę v^* dostajemy

$$\|v^*\| \leqslant \delta^{-1} + \frac{1}{|\theta|\delta} \leqslant \delta^{-1} + \delta^{-2}.$$

Określmy teraz $x^* \in X^*$ za pomocą wzoru

$$x^* = v^* - \sum_{j=1}^\infty c_j x^*_{m_j}.$$

Korzystając z poprzednich wyliczeń otrzymujemy

$$||x^*|| \leqslant 1 + \delta^{-1} + \delta^{-2}.$$

Kładąc w definicji rodziny $\mathcal{V}$ stałą C równą $1+\delta^{-1}+\delta^{-2}$ dla $j \in \mathbb{N}$ uzyskujemy

$$x^*(m_j) = v^*(m_j) - c_j = (-1)^j,$$

a więc $M' = \{m_j : j \in \mathbb{N}\} \in [M]^\infty$ spełnia $M' \in \mathcal{V}$.

4. Niech M będzie zbiorem nieskończonym otrzymanym w poprzedniej części i niech $(\varepsilon_j)_{j=1}^\infty$ będzie dowolnym ustalonym ciągiem znaków. Wybierzemy teraz zbiór nieskończony $M' \subset M$ tak, aby dla ciągu bazowego $(x_{2_j})_{j=1}^\infty$ istniał funkcjonał $x^* \in CB_{X^*}$ o własności

$$\underset{j\in\mathbb{N}}{\forall}\, x^*(x_{m_{2j}}) = \varepsilon_j.$$

Procedura jest prosta: jeśli $\xi_1 = 1$, to zaczynamy od dołożenia do M' elementów m_1 oraz m_2, gdy zaś $\xi_1 = -1$, to zaczynamy od m_2 i kontynuujemy analogicznie dla kolejnych $j \in \mathbb{N}$. Sprawdzimy, że $(x_{m_{2j}})_{j=1}^\infty \sim (e_j)_{j=1}^\infty$, gdzie $(e_j)_{j=1}^\infty$ jest bazą kanoniczną w ℓ_1. Weźmy dowolny skończony ciąg liczbowy $a_1, \ldots, a_N$. Jeśli jesteśmy w przypadku rzeczywistym, to wybierzmy znaki ε_j tak, aby $a_j\varepsilon_j = |a_j|$. Wówczas

$$||(a_j)||_{\ell_1} \geqslant \|\sum_{j=1}^N a_j x_{m_{2j}}\| \geqslant \frac{1}{C}x^*(\sum_{j=1}^N a_j x_{m_{2j}}) = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^N |a_j| = \frac{1}{C}||(a_j)||_{\ell_1}.$$

W przypadku, gdy a_j są zespolone bierzemy ciągi znaków $\varepsilon_j, \varepsilon_j'$ dla $j \in \{1, \ldots, N\}$ spełniające

$$a_j\varepsilon_j = |\mathrm{Re} a_j| + i \mathrm{Im} a_j \varepsilon_j \text{ oraz } a_j\varepsilon_j' = \mathrm{Re} a_j \varepsilon_j' + i|\mathrm{Im} a_j|.$$

Istnieją wówczas funkcjonały $x_1, x_2 \in CB_{X^*}$ takie, że

$$x_1^*(x_{m_{2j}}) = \varepsilon_j,\ \ x_2^*(x_{m_{2j}}) = \varepsilon_j'\ j = 1, \ldots, N.$$

Zatem

$$\|\sum_{j=1}^N a_j x_{m_{2j}}\| \geqslant \frac{1}{2C}\left|(x_1^* + x_2^*)\left(\sum_{j=1}^N a_j x_{m_{2j}}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{2C}\left(\sqrt{(\sum_{j}^N |\mathrm{Re} a_j|)^2 + (\sum_{j=1}^N \mathrm{Im} a_j)^2} + \sqrt{(\sum_{j}^N \mathrm{Re} a_j)^2 + (\sum_{j=1}^N |\mathrm{Im} a_j|)^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2C}\left(\sum_{j=1}^N |\mathrm{Re} a_j| + \sum_{j=1}^N |\mathrm{Im} a_j|\right) \geqslant \frac{1}{2C}\sum_{j=1}^N \sqrt{\mathrm{Re} a_j^2 + \mathrm{Im} a_j^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2C}\sum_{j=1}^N |a_j| = \frac{1}{2C}\|(a_j)\|_{l^1}.$$

□

Zanim przejdziemy do zastosowań przypomnimy pewne fakty o przestrzeni ℓ_1.

Fakt 1.3.6. *Przestrzeń ℓ_1 ma następujące własności.*

1. *Ma własność Schura (tzn. każdy słabo zbieżny ciąg jest silnie zbieżny).*
2. *Jest słabo ciągowo zupełna (tzn. każdy słaby ciąg Cauchy'ego jest słabo zbieżny).*

Wniosek 1.3.7. *Jeśli X jest przestrzenia Banacha taką, że istnieje niezwarty operator $T : X \mapsto \ell_1$, to X zawiera izomorficzną kopię ℓ_1.*

Dowód. Z założenia $T(B_X)$ nie jest zbiorem całkowicie ograniczonym, a więc

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{(x_n)\subset B_X}{\exists}\ \underset{m\neq n}{\forall}\ \|T(x_m)-T(x_n)\| \geqslant \varepsilon.$$

Stąd ciąg $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ nie jest słabo zwarty i każdy jego podciąg też nie jest słabo zwarty (własność Schura). Ponadto, żaden podciąg wymienionego wcześniej ciągu nie może być słabym ciągiem Cauchy'ego (słaba ciągowa zupełność). Wynika stąd również, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie ma słabego podciągu Cauchy'ego. Istotnie, gdyby $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ był takim podciągiem, to dla każdego $y^* \in \ell_1^*$ pamiętając, że $y^* \circ T \in X^*$ istniałaby granica

$$\lim_{k\to\infty}(y^* \circ T)(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y^*(Tx_{n_k}),$$

a więc $(Tx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ byłby słabym ciągiem Cauchy'ego, co przeczy wcześniejszym wynikom. Wystarczy teraz zastosować twierdzenie Rosenthala. □

Zanim przejdziemy do następnego wniosku udowodnimy ciężki lemat topologiczny.

Lemat 1.3.8. *Niech $\mathcal{P}$ będzie przestrzenią polską (zupełną i ośrodkową przestrzenią metryczną). Niech τ_p oznacza topologię zbieżności punktowej na $C(\mathcal{P},\mathbb{R})$ i niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\mathcal{P},\mathbb{R})$ oraz przyjmijmy*

$$K = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau_p}.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne.

1. *Każdy $f \in K \setminus \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest granicą punktową pewnego podciągu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.*
2. *Każdy podciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg punktowo zbieżny.*
3. *Każda funkcja $f \in K$ jest borelowska (tzn. przeciwobrazy zbiorów otwartych są borelowskie).*

Wniosek 1.3.9 (Odell&Rosenthal,1975)**.** *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Następujące warunki są równoważne.*

1. *X nie zawiera izomorficznej kopii ℓ_1.*

2. *Każdy element $x^{**} \in B_{X^{**}}$ jest słabą* granicą ciągu elementów z B_X.*

3. $\mathrm{card}(X^{**}) = \mathrm{card}(X) = \mathfrak{c}$.

Dowód. Implikacja 2. $\Rightarrow$ 3. jest oczywista, gdyż $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (każdy element z $B_{X^{**}}$ jest wyznaczony przez ciąg elementów z B_X).
Również nietrudno jest wykazać 3. $\Rightarrow$ 1. wystarczy zauważyć, że drugi operator sprzężony jest różnowartościowy, o ile wyjściowy operator jest różnowartościowy (w naszym przypadku jest to zanurzenie ℓ_1 w X), a więc $l_\infty^* \subset X^{**}$. Teraz $l_\infty^* = M(\beta\mathbb{N})$, a ta ostatnia przestrzeń jest oczywiście mocy $2^{\mathfrak{c}}$ (mamy tam delty Diraca we wszystkich punktach $\beta\mathbb{N}$, które ma moc $2^{\mathfrak{c}}$). Można również postępować inaczej (sprawdzimy to na ćwiczeniach): $\ell_1(\mathfrak{c}) \hookrightarrow l_\infty$, co dowodzi iż l_∞^* ma $l_\infty(\mathfrak{c})$ jako ilorazową, a ta ostatnia ma moc $2^{\mathfrak{c}}$, czyli $\mathrm{card}(X^{**}) \geqslant 2^{\mathfrak{c}}$.
Przechodzimy do dowodu implikacji 1. $\Rightarrow$ 2.. Rozważmy przestrzeń topologiczną (B_X^*, w^*). Z ośrodkowości X wiemy, że jest to przestrzeń metryczna. Ponadto jest to przestrzeń zwarta (twierdzenie Banacha-Alaoglu), a więc również zupełna i ośrodkowa. Weźmy zbiór przeliczalny $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ gęsty w B_X. Z twierdzenia Goldstina (utożsamiamy tutaj elementy $x \in X$ z elementami w X^{**} otrzymanymi przez kanoniczne włożenie)

$$\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} = B_{X^{**}}.$$

Myśląc o elementach x_n jako o rzeczywistych funkcjach ciągłych na (B_X^*, w^*) i zauważając, że w takim ujęciu słaba* topologia odpowiada zbieżności punktowej będziemy mogli zastosować ostatni lemat. Istotnie, gdyby punkt 2. nie zachodził, to z poprzedniego lematu istniałby podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ bez podciągu punktowo zbieżnego. Oznacza to, że dla każdego podciągu $(x_{n_{k_l}})_{l=1}^\infty$ ciągu $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ istnieje $x^* \in B_{X^*}$ taki, że nie istnieje granica

$$\lim_{l\to\infty} x_{k_l}(x^*) := \lim_l x^*(x_{k_l}).$$

To jednak dowodzi, iż ciąg $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ nie ma żadnego słabego podciągu Cauchy'ego, a więc z twierdzenia Rosenthala w X znajdziemy izomorficzną kopię ℓ_1. □

2 Wykład 3

2.1 Własności baz

Będziemy zajmować się teraz ciągami bazowymi. Stałą bazową będziemy oznaczać przez K.

Definicja 2.1.1. Niech $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ oraz $(y_n)_{n=1}^\infty \subset Y$ będą ciągami bazowymi. Powiemy, że są one kongruentne w odniesieniu do (X, Y), gdy istnieje liniowy izomorfizm $T : X \mapsto Y$ taki, że $Tx_n = y_n$ (to jest silniejsza własność niż równoważność).

Twierdzenie 2.1.2 (Zasada małych zaburzeń). *Niech $(x_n) \subset X$ będzie ciągiem bazowym ze stałą bazową K oraz niech $(y_n) \subset X$ będzie ciągiem takim, że*

$$\theta := 2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{||x_n - y_n||}{||x_n||} < 1.$$

Wówczas (y_n) jest ciągiem bazowym oraz (x_n) i (y_n) są kongruentne. Co więcej stałą bazową dla ciągu (y_n) można dobrać $\leqslant (1+\theta)(1-\theta)^{-1}K$.

Dowód. Mamy $||x_1^*|| \cdot ||x_1|| \leqslant K$ oraz $||x_n^*|| \cdot ||x_n|| \leqslant 2K$ dla $n \geqslant 2$. Niech $A : X \mapsto X$ będzie określony wzorem

$$A(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n^*}(x)(y_n - x_n),$$

gdzie $\widehat{x_n^*}$ jest dowolnym rozszerzeniem x_n^* do elementu z X^*. Otrzymujemy

$$||Ax|| \leqslant ||x|| + \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n^*|| \cdot ||x_n|| \cdot \frac{||x_n - y_n||}{||x_n||}.$$

Zatem $||A|| \leqslant 1 + \theta$, a stąd $||A - I|| \leqslant \theta < 1$, a więc A jest operatorem odwracalnym, co kończy dowód (oczywiście $Ax_n = y_n$). $\square$

Definicja 2.1.3. Niech $(e_n) \subset X$ będzie ciągiem bazowym i niech $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots$. Wówczas każdy ciąg niezerowych wektorów (u_n) postaci

$$u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$$

będziemy nazywać blokowym ciągiem bazowym.

Twierdzenie 2.1.4 (Bessaga-Pełczyński). *Niech (e_n) będzie bazą w przestrzeni Banacha X oraz niech ciąg (x_n) spełnia warunki:*

1. $\inf ||x_n|| > 0$
2. $\lim_{n\to\infty} e_k^*(x_n) = 0$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$.

Wówczas istnieje podciąg (x_{n_k}) kongruentny do pewnego blokowego ciągu bazowego utworzonego z (e_n) (można tutaj powiększyć stałą bazową jedynie o dowolne $\varepsilon > 0$).

Dowód. Niech $\alpha = \inf ||x_n|| > 0$ i niech $v \in (0, \frac{1}{4})$. Konstruujemy wędrujący garb otrzymując podciąg $(x_{n_k}) \subset X$ oraz ciąg $(r_k) \subset \mathbb{N}$ tak, aby

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} ||S_{r-1}x_{n_k}|| < \frac{v^k\alpha}{2K} \text{ oraz } ||x_{n_k} - S_{r_k}x_{n_k}|| < \frac{v^k\alpha}{2K}.$$

Kładziemy $r_0 = 0$ oraz $n_1 = 1$ i wybieramy $r_1 \in \mathbb{N}$ tak, aby $||S_{r_1}x_1 - x_1||$ było odpowiednio małe. Z założenia

$$\lim_{n\to\infty} S_{r_1}x_n = 0,$$

więc możemy wybrać $n_2 > n_1$ tak, aby $||S_{r_1}x_{n_2}||$ było dostatecznie małe i bierzemy $r_2 \in \mathbb{N}$, aby zapewnić sobie stosowną nierówność na $||S_{r_2}x_2 - x_2||$. Kontynuując tę procedurę otrzymamy ciąg $y_k := S_{r_k}x_{n_k} - S_{r_{k-1}}x_{n_k}$. Z nierówności trójkąta mamy

$$||y_k - x_{n_k}|| < \frac{v^k\alpha}{K} \text{ i dalej } |||y_k|| \geqslant \alpha - \frac{v\alpha}{K} \geqslant (1-v)\alpha > 0.$$

Ponadto,

$$2K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||y_k - x_{n_k}||}{||y_k||} < 2(1-v)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}v^k = \frac{2v}{(1-v)^2} < 1,$$

a więc (x_{n_k}) jest kongruentny z (y_k). □

Wprowadzimy teraz pewne ograniczenia na rozważane bazy.

Definicja 2.1.5. Bazę $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ będziemy nazywać kurczącą, jeśli $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą X^*, czyli $[e_n^*] = X^*$.

Uwaga 2.1.6. Ciąg (e_n^*) jest bazowy dla $H := [e_n^*] \subset X^*$. Ponadto $H = \{x^* \in X^* : ||S_N^*x^* - x^*|| \to 0\}$.

Na wszelki wypadek sprawdzimy jeszcze postać S_N^*.

$$< x, S_N^*x^* >=< S_N\sum_{k=1}^{\infty}e_k^*(x)e_k, x^* >=< \sum_{k=1}^{N}e_k^*(x)e_k, x^* >,$$

więc

$$S_N^*x^* = \sum_{k=1}^{\infty}x^*(e_k)e_k^*.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\sup_N ||S_N^*||_{H\mapsto H} \leqslant \sup_N ||S_N^*||_{X^*\mapsto X^*} = \sup_N ||S_N|| = K.$$

Stwierdzenie 2.1.7. *Niech $(e_n) \subset X$ będzie ciagiem bazowym ze stałą K. Wówczas $H = [e_n^*] \subset X^*$ jest K^{-1} normujący dla X, czyli*

$$||x||_H = \sup\{|h(x)| : h \in H, ||h|| \leqslant 1\}$$

spełnia $\frac{1}{K}||x|| \leqslant ||x||_H \leqslant ||x||$. W szczególności, odwzorowanie $x \mapsto j(x)|_H \in H^*$ jest izomorficznym włożeniem.

Dowód. Niech $x \in X$ oraz weźmy $x^* \in S_{X^*}$ takie, że $x^*(x) = ||x||$. Wówczas

$$\frac{|(S_N^* x^*)x|}{K} \leqslant \frac{|(S_N^* x^*)x|}{||S_N^* x^*||} \leqslant \sup\{|h(x)| : h \in H, ||h|| \leqslant 1\} = ||x||_H.$$

Z drugiej strony,

$$|(S_N^* x^*)(x)| = |x^*(S_N x)| \to |x^*(x)| = ||x||.$$

□

Następne stwierdzenie wyjaśni nazwę "baza kurcząca".

Stwierdzenie 2.1.8. *Baza $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest kurcząca wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{N\to\infty} ||x^*|_{[e_n]_{n>N}}|| = 0 \text{ dla każdego } x^* \in X^*.$$

Dowód. Jeśli (e_n) jest kurcząca, to piszemy $x^* = (x^* - S_N^* x^*) + S_N^* x^*$ i mamy

$$||x^*|_{[e_n]_{n>N}}|| \leqslant ||(x^* - S_N^* x^*)|_{[e_n]_{n>N}}|| = ||x^* - S_N^* x^*|| \to 0.$$

W drugą stronę, niech $x^* \in X^*$. Pokażemy, że $S_N^* x^* \mapsto x^*$. Istotnie, dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$\begin{gathered}|(x^* - S_N^* x^*)x| = |x^*(I_{X^*} - S_N)(x)| = |x^*|_{[e_n]_{n>N}}(I - S_N)(x)| \leqslant \\ \leqslant ||x^*|_{[e_n]_{n>N}}|| \cdot ||I - S_N|| \to 0.\end{gathered}$$

□

Definicja 2.1.9. Baza $(e_n) \subset X$ jest ograniczenie zupełna, gdy dla dowolnego ciągu skalarów (a_n), jeśli

$$\sup_N \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\| < \infty,$$

to szereg $\sum a_k e_k$ zbiega w X.

Przykład 2.1.10. $(e_n) \subset \ell_p$, $1 < p < \infty$ są ograniczenie zupełne i kurczące.
$(e_n) \subset \ell_1$ jest ograniczenie zupełna, ale nie jest kurcząca.
$(e_n) \subset c_0$ nie jest ani kurcząca, ani ograniczenie zupełna.
$(f_n) \subset c_0$, $f_n = e_1 + \dots e_n$ jest kurcząca, ale nie ograniczenie zupełna.

Twierdzenie 2.1.11. *Niech (e_n, e_n^*) będzie bazą w X. Wówczas następujace warunki są równoważne.*

1. *e_n jest ograniczenie zupełna.*

2. *e_n^* jest kurcząca.*

3. *Odwzorowanie $j : X \mapsto H^*$ jest izomorfizmem "na", czyli $X \simeq H^*$.*

Dowód. $1 \Rightarrow 3$. Wystarczy pokazać, że j jest "na". W tym celu weźmy $h^* \in H^*$ oraz rozważmy ciąg

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} h^*(x_i^*) j x_i\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Korzystając z tego, że $(jx_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ jest układem biortogonalnym otrzymujemy

$$\|\sum_{i=1}^{n} h^*(x_i^*) j x_i\|_{Z^*} = ||h^*|| \sup_{||z|| \leqslant 1} \|\sum_{i=1}^{n} j x_i(z) x_i^*\| =$$

$$||h^*|| \sup_{||z|| \leqslant 1} \|\sum_{i=1}^{n} z(x^i) x_i^*\| \leqslant K||h^*||.$$

Ponieważ j jest izomorfizmem ciąg

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} h^*(x_i^*) x_i\right\}_{n=1}^{\infty}$$

jest także ograniczony, więc korzystając z ograniczonej zupełności jst on zbieżny do pewnego elementu $x \in X$. Łatwo sprawdzić, że $j(x) = h^*$.
$3 \Rightarrow 2$. To jest oczywiste, bo $(e_n^*, je_n)_{n=1}^{\infty}$ jest układem biortogonalnym oraz $[j(e_n)] = H^*$, co z definicji oznacza, iż (e_n^*) jest kurcząca.
$2. \Rightarrow 1$ Załóżmy, że

$$\sup_N \|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\| < \infty.$$

Normy w H^* oraz w X są równoważne, więc z twierdzenia Banacha - Alaoglu istnieje słaby* punkt skupienia $h^* \in H^*$ zbioru

$$\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n j(e_n)\right\}_{N=1}^{\infty}.$$

Z drugiej strony, skoro (e_n^*) jest kurcząca, to

$$h^* = \sum_{n=1}^{\infty} h^*(e_n^*) j e_n.$$

Teraz otrzymujemy $h^*(e_n^*) = a_n$, a więc przypominając sobie raz jeszcze, iż normy w X oraz w H^* są równoważne otrzymujemy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

□

Przechodzimy do twierdzenia charakteryzującego przestrzenie refleksywne w języku własności baz.

Twierdzenie 2.1.12 (James,1951). *Niech X będzie przestrzenią Banacha z bazą (e_n). Wówczas X jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy (e_n) jest ograniczenie zupełna i kurcząca.*

Dowód. $\Rightarrow$ Pozostawione jako ćwiczenie.
$\Leftarrow$ Łatwe - skoro (e_n) jest kurcząca, to $H = [e_n^*] = X^*$ i z ograniczonej zupełności $j : X \mapsto H^* = X^{**}$ jest "na". □

3 Wykłady 4-8

3.1 Przestrzenie Tsirelsona zwykłe i mieszane

Definicja 3.1.1 (Tsirelson 1974, Figiel-Johnson 1974). Przestrzenią Tsirelsona T będziemy nazywać uzupełnienie c_{00} względem jedynej normy $\|\cdot\|_T$ spełniającej warunek

$$\|x\|_T = \max\{||x||_\infty, \frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^{m}||E_jx||_T\} \text{ dla } x \in c_{00} \tag{5}$$

Tutaj $E_x = \chi_E x$, a supremum jest wzięte po wszystkich rodzinach skończonych zbiorów E_i takich, że $m \leqslant E_1 < \dots E_m$.

Trzeba uzasadnić, że taka norma w ogóle istnieje oraz jej jedyność.

Uwaga 3.1.2. Istnieje jedyna norma spełniająca (5).

Dowód. Niech $||x||_0 = ||x||_\infty$ oraz dla $n \geqslant 0$ połóżmy

$$||x||_{n+1} = \max\{||x||_n, \frac{1}{2}\sup\sum_{j=1}^{n}||E_jx||_n\}$$

Wówczas

$$||x||_\infty = ||x||_0 \leqslant ||x||_1 \leqslant \dots \leqslant ||x||_n \leqslant \dots \leqslant ||x||_{l^1}.$$

Ciąg rosnący i ograniczony ma granicę, więc możemy przyjąć (formalnie trzeba by sprawdzić, że to działa)

$$||x||_T = \lim_{n\to\infty}||x||_n.$$

Przechodzimy do dowodu jednoznaczności. Załóżmy, że $||\cdot||'$ spełnia (5). Wówczas przez indukcję otrzymujemy nierówność $||\cdot||' \geqslant ||\cdot||_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc $||\cdot||' \geqslant ||\cdot||_T$. Teraz, jeśli dla pewnego $x \in c_{00}$ mamy $||x||' > ||x||_T$, to moglibyśmy wybrać x o najmniejszym nośniku, co jest niemożliwe. □

Twierdzenie 3.1.3 (ℓ_1-Jamesa o dystorsji). *Załóżmy, że X zawiera izomorficzną kopię l^1 i niech $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ będzie znormalizowanym ciągiem równoważnym bazie kanonicznej $(e_n)_{n=1}^\infty$ w l^1. Wówczas*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{(y_n)}{\exists}\ (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}|a_j| \leqslant \|\sum_{j=1}^{n}a_jy_j\| \leqslant \sum|a_j|,$$

gdzie $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest znormalizowanym blokowym ciągiem bazowym utworzonym z* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Dowód. Teza twierdzenia jest równoważna następującemu zdaniu: istnieje norma na $|||\cdot|||$ na l^1 taka, że

$$\exists_{M>0}\ \exists_{S\subset l^1} (1-\varepsilon)M||y|| \leqslant |||y||| \leqslant M||y||,$$

gdzie S jest nieskończenie wymiarową podprzestrzenią.
Określmy

$$M_n = \inf\{m > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant m\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\|$$
$$\text{dla wszystkich } (a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}, a_k = 0 \text{ dla } k < n+1\}.$$

Widać od razu, że

$$M_1 \geqslant M_2 \geqslant \ldots \geqslant 1.$$

Możemy więc określić M jako granicę ciągu M_n. Weźmy teraz $p_0 \in \mathbb{N}$ spełniające $M_{p_0} < (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}M$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje blok $\{p_{n-1}+1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{N}$ i pewne skalary b_j $(p_{n-1} < j \leqslant p_n)$ takie, że

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} M\| \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} b_j x_j\| \leqslant \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} |b_j| \leqslant M_n\| \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} b_j x_j\|.$$

Przyjmujemy

$$y_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} b_j x_j.$$

Wówczas

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j| \leqslant (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} M^{-1} \sum_{j=1}^{N} |a_j| \sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j} |b_i|.$$

Teraz

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j| \sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j} |b_i| \leqslant M_{p_0}\|\sum_{j=1}^{N} a_j y_j\|,$$

a zatem

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\|\sum_{j=1}^{N} a_j y_j\|.$$

□

Twierdzenie 3.1.4. *Przestrzeń Tsirelsona nie zawiera izomorficznej kopii* c_0 *i* ℓ_p *dla* $1 \leqslant p < \infty$.

Dowód. 1. Załóżmy, że $c_0 \hookrightarrow T$ lub $\ell_p \hookrightarrow T$ dla pewnego $p \in (1, \infty)$. Z twierdzenia Bessagi i Pełczyńskiego możemy założyć, że istnieje $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subset T$ znormalizowany blokowy ciąg bazowy, który jest podciągiem bazy kanonicznej $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ w T równoważny z bazą kanoniczną w c_0 lub ℓ_p. Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ możemy dobrać $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathrm{supp}(\xi_{m+1}), \ldots, \mathrm{supp}(\xi_{n+m})$ jest dopuszczalnym ciągiem zbiorów, więc

$$\frac{m}{2} \leqslant ||\xi_{m+1} \ldots \xi_{n+m}||_T.$$

Ostatnie wyrażenie możemy oszacować przez 1 w przypadku c_0 oraz przez $m^{\frac{1}{p}}$ w przypadku ℓ_p, co jest oczywistą sprzecznością.
2. Załóżmy, że $\ell_1 \hookrightarrow T$ i $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$. Z twierdzenia Bessagi-Pełczyńskiego i ℓ_1-twierdzenia o dystorsji możemy przyjąć, iż istnieje znormalizowany blokowy ciąg bazowy utworzony z $(e_n) \subset T$ spełniający

$$\|\sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j\| \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \tag{6}$$

dla każdego ciągu skalarów (a_n). Rozważmy

$$\xi_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Weźmy $r \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathrm{supp}(\xi_0) \subset [1, r]$. Wówczas z (6) mamy

$$\|\xi_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j\| \geqslant 2(1-\varepsilon).$$

Z faktu, że (ξ_n) mają rozłączne nośniki wynika

$$\|\xi_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j\| > ||\xi_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j||_{\infty}.$$

Definicja normy daje ciąg zbiorów $k \leqslant E_1 < \ldots E_k$ spełniający

$$\|\xi_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j\| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \|E_i(\xi_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j)\|.$$

Rozważmy dwa przypadki.
a. Jeśli wszystkie E_i są rozłączne z $\mathrm{supp}(\xi_0)$, to

$$\|\xi_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j\| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} ||E_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \right) || \leqslant ||\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j|| \leqslant 1,$$

co jest wykluczone.
b. $E_i\xi_0 \neq 0$ dla przynajmniej jednego i. Wówczas $k \leqslant r$. Liczymy

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\|E_i(\xi_0+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}||E_i\xi_0|| + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\|E_i\xi_j\|.$$

Istnieje co najwyżej k wektorów spośród ξ_j, których nośniki przecinają co najmniej dwa przedziały E_i. W tym przypadku szacujemy brutalnie

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k}\|E_i\xi_j\| \leqslant \frac{1}{n}||\xi_j|| = \frac{1}{n}.$$

W drugim przypadku mamy $n-k$ wektorów i dla każdego z nich prawdą jest

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k}||E_i\xi_j|| = \frac{1}{2n}||E_s\xi_j|| \leqslant \frac{1}{2n}||\xi_j|| = \frac{1}{2n}.$$

Zatem

$$\|\xi_0+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\| \leqslant 1+\frac{k}{n}+\frac{n-k}{2n} \leqslant 1+\frac{r}{n}+\frac{n-r}{2n} = 1+\frac{n+r}{2n} \to \frac{3}{2} < 2,$$

co również jest niemożliwe. □

Przechodzimy teraz do mieszanych przestrzeni Tsirelsona.

Definicja 3.1.5. Niech $\mathcal{M} \subset [\mathbb{N}]^{<\infty}$ będzie zwartą rodziną zawierającą singletony i zamkniętą na branie podzbiorów oraz niech $\theta \in (0,1)$. Przestrzeń Tsirelsona $T(\mathcal{M},\theta)$ określamy jako uzupełnienie c_{00} w normie

$$||x||_{T(\mathcal{M},\theta)} = \max\{||x||_\infty, \theta \sup \sum_{j=1}^{n}||E_jx||_{T(\mathcal{M},\theta)}\},$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich $\mathcal{M}$-dopuszczalnych ciągach przedziałów $\{E_1 < \ldots < E_n\}$, czyli takich, dla których istnieje $\{m_1,\ldots,m_n\} \in \mathcal{M}$, $m_1 \leqslant \min E_1 < m_2 \leqslant \min E_2 < \ldots < m_n \leqslant \min E_n$.
Dla ciągu zwartych rodzin $\{\mathcal{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełniających powyższe warunki i zbieżnego do zera ciągu $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ określamy mieszaną przestrzeń Tsirelsona $T[(\mathcal{M}_n,\theta_n)_{n=1}^{\infty}]$ jako uzupełnienie c_{00} w normie

$$||x||_* = \{||x||_\infty, \sup_n \sup_{E_1<\ldots<E_k} \theta_n \sum_{j=1}^{k}||E_jx||_*\},$$

gdzie supremum jest dla każdego n brane po $\mathcal{M}_n$ dopuszczalnych ciągach przedziałów.

Przykład 3.1.6. 1. $T = T(S, \frac{1}{2})$, gdzie $S = \{A \subset \mathbb{N} : \#A \leqslant \min A\}$.

2. Przyjmijmy $\mathcal{A}_n = \{A \subset \mathbb{N} : \#A \leqslant n\}$. Wtedy dostajemy $T(\mathcal{A}_n, \theta) \simeq c_0$ lub ℓ_p oraz

$$T[(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\log_2(n+1)})_{n=1}^{\infty}] - \text{ przestrzeń Schlumprechta.}$$

Uwaga 3.1.7. Będziemy używać zbiorów normujących $W(\mathcal{M}, \theta)$ i $W[(\mathcal{M}_n, \theta_n)_{n=1}^{\infty}]$, które są scharakteryzowane przez następujące dwie własności.

1. Zawierają $\pm e_k^*$ dla $k \in \mathbb{N}$.

2. Są domknięte względem ($(\mathcal{M}, \theta)$ operacji $(\mathcal{M}_n, \theta_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, odpowiednio), czyli dla dowolnego ciągu $f_1, \ldots, f_k \in W(\mathcal{M}, \theta)$ z $\{\mathrm{supp} f_1 < \ldots < \mathrm{supp} f_k\}$ będącego $\mathcal{M}$-dopuszczalnym mamy $f = \theta(f_1 + \ldots + f_k) \in W(\mathcal{M}, \theta)$.

Wówczas

$$||x||_{T(\mathcal{M},\theta)} = \sup\{f(x) : f \in W(\mathcal{M}, \theta)\}$$
$$||x||_{T[(\mathcal{M}_n,\theta_n)_{n=1}^{\infty}]} = \sup\{f(x) : f \in W[(\mathcal{M}_n, \theta_n)_{n=1}^{\infty}]\}.$$

Twierdzenie 3.1.8 (Argyros - Deliyanni,1991)**.** *Niech $\{\mathcal{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą takie jak wcześniej. Załóżmy, że $i(\mathcal{M}_n) \geqslant \omega$ lub $i(\mathcal{M}_n) = r < \omega$ i $\theta_n > \frac{1}{r}$. Wówczas mieszana przestrzeń Tsirelsona $X = T[(\mathcal{M}_n, \theta_n)_{n=1}^{\infty}]$ jest refleksywna. Co więcej, jeśli zachodzi pierwszy przypadek, to ℓ_p nie zanurza się izomorficznie w X dla $p \in (1, \infty)$.*

Dowód. Z twierdzenia Jamesa wystarczy sprawdzić, że $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ograniczenie zupełna i kurcząca.
Zaczynamy od tej pierwszej własności. Załózmy, że teza jest fałszywa. Wówczas bez straty ogólności, korzystając z twierdzenia Bessagi - Pełczyńskiego możemy założyć, iż istnieje blok (x_n) utworzony z (e_n) spełniający

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \|\sum_{n=1}^{N} x_n\| \leqslant q \text{ oraz } \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} ||x_n|| \geqslant \varepsilon.$$

Przyjmijmy $i(\mathcal{M}_n) = r$ i weźmy $\{n_0\} \in \mathcal{M}_n^{(r)}$. Założenia o rodzinie $\mathcal{M}_n$ implikują istnienie podciągu $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ oraz nieskończonego zbioru $\{n_0, n_1, \ldots\}$ o własnościach $n_j \leqslant \mathrm{supp} x_j < n_{j+1}$,

$$\underset{l\in\mathbb{N}}{\forall} \{n_0, n_{lr+1}, \ldots, n_{(l+1)r-1} \in \mathcal{M}_n.$$

Zatem podciąg $(x'_k)_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia: dla każdego $l \in \mathbb{N}$ $\{x'_{lr+1}, \ldots, x'_{(l+1)r}\}$ jest $\mathcal{M}_n$ dopuszczalny. Określmy

$$x_l^{(1)} = \sum_{j=1}^{r} x'_{lr+j}.$$

Wówczas
$$||x_l^{(1)}|| \geqslant \theta_n \sum_{j=1}^{r} ||x'_{lr+j}|| \geqslant \theta_n r\varepsilon.$$

Teraz zamieniając (x'_k) na $(x_l^{(1)})$ możemy kontynuować procedurę otrzymując kolejne elementy $(x_l^{(k)})$ i $||x_l^{(k)}|| \geqslant (\theta_n r)^k\varepsilon$. Dla dostatecznie dużego k mamy więc $||x_l^{(k)}|| > 1$, co w połączeniu z 1-bezwarunkowością bazy (e_n) daje żądaną sprzeczność.
Przechodzimy do drugiej części. Niech $\theta := \max\theta_n < 1$. Niech W oznacza zbiór normujący w X^* taki, jak w uwadze poprzedzającej twierdzenie. Z ćwiczeń wiemy, że $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}(W)}$. Pokażemy, że dla $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $Q_m f \in \theta B_{X^*}$, gdzie $Q_m f$ jest ograniczeniem f do $[e_n]_{n\geqslant m}$. Weźmy na początek $f \in \overline{W}$ i spróbujmy znaleźć $m \in \mathbb{N}$ takie, że $Q_m f \in \theta\overline{\mathrm{co}(W)}$. Niech $(f^n)_{n=1}^{\infty} \subset W$ oraz $f^n \to f$ punktowo.

1. Jeśli $f^n = \pm e^*_{k_n}$ dla nieskończenie wielu n, to koniec (wtedy $f = \pm e^*_k$ lub $f = 0$).

2. Możemy założyć, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi
$$f^n = Q_{k_n}(f_1^n + \ldots + f_{d_n}^n)$$
i $m_1^n \leqslant \mathrm{supp} f_1^n < m_2^n \leqslant \ldots < m_{d_n}^n \leqslant \mathrm{supp} f_{k_n}^n$.

3. Jeśli $\theta_{k_{m_j}} \to \theta$, to $\{m_1^n < \ldots < m_{d_n}^n\} \in \mathcal{M}_{kn}$ i $f = 0$.

4. Możemy przyjąć, że $\theta_{k_n} = \theta_k$ jest stałe i wszystkie zbiory $\{m_1^n < \ldots < m_{d_n}^n\}$ należą do pewnego $\mathcal{M}_k$. Skoro $\mathcal{M}_k$ jest zwarte, to istnieje $\{m_1 < \ldots < m_d\} \in \mathcal{M}_k$ i możemy przyjąć, iż $m_i^n = m_i$ oraz
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{i\in\{1,\ldots,d\}} m_{d+1}^n \to \infty, m_{d+2}^n \to \infty.$$

5. Zaobserwujmy teraz, że f jest postaci
$$f = \theta_k(f_1 + \ldots + f_{d-1} + \ldots).$$

Z ostatniego punktu $Q_{m_d} f = \theta_k f_d \in \theta B_{X^*}$ dla pewnych $f_d \in \overline{W}$.
Rozważmy teraz dowolne $f \in \overline{c_0(W)} = B_{X^*}$. Z twierdzenia Choquetta
$$\exists_{\mu\in M_1(\overline{W})} \forall_G G(f) = \int_{\overline{W}} G(h)d\mu(h),$$
gdzie G jest funkcjonałem liniowym słabo*-ciągłym. Weźmy pod uwagę zbiory
$$A_m = \{h \in \overline{W} : Q_m h \in \theta^2\overline{\mathrm{co}(W)}\},\ m \in \mathbb{N}.$$

Wówczas istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\mu(A_{n_0}) \geqslant \delta$. Uzasadnimy teraz zdanie: $\frac{1}{\theta} Q_{n_0} f \in \overline{\mathrm{co}(W)}$. Załóżmy, że tak nie jest, istnieje wtedy liniowy słabo* ciągły funkcjonał G spełniający

$$\sup\{G(h) : h \in \overline{\mathrm{co}(W)}\} = 1 \text{ oraz } \frac{1}{\theta} G(Q_{m_0}(f)) > 1.$$

Zatem

$$\frac{1}{\theta} G(Q_{m_0} f) = \frac{1}{\theta} \int_{\overline{W}} G(Q_{m_0} h) d\mu(h) = \frac{1}{\theta} \left(\int_{A_{m_0}} + \int_{\overline{W} \setminus A_{m_0}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\theta} \cdot \theta^2 \mu(A_{m_0}) + \frac{1}{\theta} \mu(\overline{W} \setminus A_{m_0}) \leqslant \theta + \frac{1}{\theta}(1 - \delta) < 1.$$

□

Twierdzenie 3.1.9 (Bellenot 1986,Argyros - Deliyanni, 1992)**.** *Niech $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy przestrzeń $X = T(\mathcal{A}_n, \theta)$, gdzie $\mathcal{A}_n = \{A \subset \mathbb{N} : \#A \leqslant n\}$. Wówczas*

1. *Jeśli $\theta \leqslant \frac{1}{n}$, to $X \simeq c_0$.*
2. *Jeśli $\theta > \frac{1}{n}$, $\theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$, to $X \simeq \ell_p$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*

Dowód. W pierwszym przypadku wystarczy udowodnić, że $||\sum a_j e_j|| \leqslant \max_j |a_j|$, co jest równoważne

$$\underset{f \in W}{\forall} f(\sum a_j e_j) \leqslant \max_j |a_j|.$$

Będziemy używać "analizy drzewkowej" $f \in W$, czyli pewnego schematu $(f_t)_{t \in T} \subset W$ w formie drzewa określonego poprzez warunki

- jedynym korzeniem jest $f_0 = 1$,
- dla każdego końcowego węzła $t \in T$ jest $f_t = \pm e_k^*$,
- jeśli $t \in T$ nie jest węzłem końcowym, to

$$f_t = \theta \sum_{s \in S_t} f_s.$$

Przez indukcję otrzymujemy $f = \theta(f_1 + \ldots + f_n)$. Teraz

$$f(\sum a_j e_j) = \theta \sum_{j=1}^{n} f_j(\sum a_i e_i) \leqslant \theta \cdot n \max_i |a_i| \leqslant \max |a_i|.$$

Przechodzimy do drugiego przypadku (wyraźnie trudniejszego). Trzeba udowodnić, że $||x|| \leqslant ||x||_{\ell_p}$ dla $x \in c_{00}$. Ustalmy więc $f \in W$ oraz drzewo f, czyli

$$\underset{t \in T}{\forall} f_t = \theta \sum_{s \in S_t} f_s.$$

Zauważmy, że
$$(\#S_t)^{\frac{1}{q}} \leqslant ||x||_p.$$
Stąd
$$f_t(x) = \theta \sum_{s \in S_t} f_s(x) = \theta \sum_{s \in S} f_s(x_s) \leqslant$$
$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \sum_{s \in S_t} ||x_s||_p \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{s \in S_t} ||x_s||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Pokażemy teraz, że dla dowolnych skalarów a_j zachodzi nierówność
$$|| \sum a_j e_j || \geqslant \frac{1}{2n} \left(\sum |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Oszacujemy najpierw
$$\| \sum_{j=1}^{l} r_j^{\frac{1}{p}} e_j \|,$$
gdzie $r_1, \ldots, r_l$ są nieujemnymi liczbami wymiernymi. Niech $r_j = \frac{k_j}{k}$, $s_0 = 0$ oraz $s_j = k_1 + \ldots + k_j$. Przyjmijmy również
$$u_j = \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} e_i.$$
Dostajemy
$$\| \sum_{j=1}^{l} r_j^{\frac{1}{p}} e_j \| = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \| \sum_{j=1}^{l} k_j^{\frac{1}{p}} e_j \| \geqslant$$
$$\frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \| \sum_{j=1}^{l} ||u_j|| e_j \| \geqslant \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \| \sum_{j=1}^{l} ||u_j|| \frac{u_j}{||u_j||} \| =$$
$$\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \| \sum_{l=1}^{s_l} e_i \| \geqslant \frac{\theta}{2} \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \cdot \left(\frac{s_l}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\theta}{2n^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{j=1}^{l} r_j \right)^{\frac{1}{p}}.$$
W przedostatniej nierówności skorzystaliśmy z następującego faktu, którego dowód teraz przedstawimy.
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \| \sum_{j=1}^{m} e_j \| \geqslant \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Wybierzmy zatem $s \in \mathbb{N}$ tak, aby $n^s \leqslant m < n^{s+1}$. Połóżmy
$$f = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \sum_{j=1}^{n^s} e_j^* \in W.$$

Wówczas

$$\| \sum_{j=1}^{m} e_j \| \geqslant \frac{1}{n^{\frac{s}{q}}} \left(\sum_{j=1}^{n^s} e_j^* \right) \left(\sum_{j=1}^{n^s} e_j \right) = = \frac{n^s}{n^{\frac{s}{q}}} = n^{\frac{s}{p}} = \frac{n^{\frac{s+1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}} > \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dalej, należałoby wykazać nierówność

$$\| \sum_{j=1}^{l} a_j x_j \| \leqslant \frac{2}{\theta} \| \sum_{j=1}^{l} a_j e_j \|,$$

gdzie $(x_k)_{k=1}^{l}$ jest znormalizowanym ciągiem bazowym utworzonym z $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. $\square$

3.2 Dystorsowalność przestrzeni Schlumprechta

Zaczniemy od definicji.

Definicja 3.2.1. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha i niech $\lambda > 1$. Powiemy, że X jest λ-dystorsowalna, gdy istnieje równoważne przenormowanie $(X, |\cdot|)$ spełniające warunek:

$$\inf_{\substack{Y \subset X \\ \dim Y = \infty}} \sup \left\{ \frac{|x|}{|y|} : |||x||| = |||y|||,\, x, y \in Y \right\} \geqslant \delta.$$

Przypomnijmy, że przestrzeń Schlumprechta $\mathcal{S}$ to mieszana przestrzeń Tsirelsona

$$\mathcal{T} \left[\left(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\log_2(n+1)} \right)_{n=1}^{\infty} \right].$$

Celem tego paragrafu jest udowodnienie, że przestrzeń $\mathcal{S}$ jest *dowolnie dystorsowalna*, tzn. jest λ-dystorsowalna przy każdym $\lambda > 1$. Kluczowe będzie tu wykazanie istnienia pewnych specjalnych układów podzbiorów $S_{\mathcal{S}} \times B_{\mathcal{S}^*}$ o własnościach wymienionych poniżej.

Definicja 3.2.2. Niech X będzie przestrzenią unormowaną i niech $A_n \subset S_X$ oraz $A_n^* \subset B_{X^*}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Parę $((A_n)_{n=1}^{\infty}, (A_n^*)_{n=1}^{\infty})$ nazwiemy *asymptotycznym układem biortogonalnym ze stałą* $\delta > 0$, gdy spełnione są następujące warunki

1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór A_n jest asymptotyczny, czyli $A_n \cap Y \neq \emptyset$ dla każdej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni $Y \subset X$.

2. Dla wszelkich $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, oraz dowolnych $x \in A_m$, $x^* \in A_n^*$, mamy $|x^*(x)| < \delta$.

3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $x \in A_n$ istnieje taki funkcjonał $x^* \in A_n^*$, że $x^*(x) > 1 - \delta$.

Twierdzenie 3.2.3 (Gowers, Maurey, 1993). *Niech $0 < \delta < \frac{1}{36}$. Jeśli X jest ośrodkową przestrzenią unormowaną z asymptotycznym układem biortogonalnym ze stałą δ, to X można równoważnie przenormować tak, aby nie zawierała ona żadnego $\frac{1}{\sqrt{36\delta}}$-bezwarunkowego ciągu bazowego.*

Dowód. Niech $((A_n)_{n=1}^{\infty}, (A_n^*)_{n=1}^{\infty})$ będzie asymptotycznym układem biortogonalnym ze stałą δ taką, jak w treści twierdzenia. Z ośrodkowości X – dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki zbiór przeliczalny $Z_n^* \subset A_n^*$, że dla każdego $x \in A_n$ istnieje $z^* \in Z_n^*$ spełniający $z^*(x) > 1 - \delta$. Połóżmy

$$Z^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^*.$$

Niech

$$\sigma : \bigcup_{n=0}^{\infty} (Z^*)^n \to \mathbb{N}$$

będzie dowolną injekcją (dziedziną jest tu zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach ze zbioru Z^*). Funkcjonał $f \in X^*$ będziemy nazywać funkcjonałem specjalnym długości $r \in \mathbb{N}$, jeżeli da się zapisać w postaci $f = z_1^* + \ldots z_r^*$, przy czym

$$z_1^* \in Z_1^* \text{ oraz } z_{j+1}^* \in Z_{\sigma(z_1^*, \ldots, z_j^*)}^* \quad \text{dla każdego } j = 1, \ldots, r-1.$$

Niech Γ_r oznacza zbiór wszystkich funkcjonałów specjalnych długości r. Przyjmijmy $r = \lfloor \delta^{-\frac{1}{2}} \rfloor$ i określmy nową normę na X za pomocą wzoru

$$|||x||| = \max \left\{ \|x\|, \, r \cdot \sup_{f \in \Gamma_r} |f(x)| \right\}.$$

Dla dowolnego liniowo niezależnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ liniowo niezależnych wektorrów chcemy skonstruować ciąg $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ wektorów blokowych (względem ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$) tak, aby

$$(r-1) \left|\left|\left| \sum_{j=1}^{r} (-1)^j z_j \right|\right|\right| < 4 \cdot \left|\left|\left| \sum_{j=1}^{r} z_j \right|\right|\right|.$$

Wynikać stąd będzie, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest $\left(\frac{r-1}{4}\right)$ bezwarunkowy, co da nam tezę, ponieważ $(r-1)/4 > \frac{1}{\sqrt{36\delta}}$.

Niech X_1 będzie przestrzenią liniową rozpiętą przez wszystkie $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Wówczas istnieje $z_1 \in X_1 \cap A_1$ oraz możemy wziąć $z_1^* \in Z_1^*$ spełniające $z_1^*(z_1) > 1 - \delta$. Dalej, niech X_2 będzie przestrzenią liniową rozpietą przez te x_i, które nie były potrzebne do wygenerowania z_1. Znów, istnieje $z_2 \in X_2 \cap A_{\sigma(z_1^*)}$ oraz taki $z_2^* \in Z_{\sigma(z_1^*)}^*$, że $z_2^*(z_2) > 1 - \delta$. Kontynnując tę procedurę, otrzymamy ciągi $z_1, \ldots, z_r$ oraz $z_1^*, \ldots, z_r^*$ spełniające $\|z_j\| = 1$, $z_j^*(z_j) > 1 - \delta$ dla każdego

$j = 1, \ldots, r$, a także $z_1 \in Z_1^*$ i $z_{j+1}^* \in Z^*_{\sigma(z_1^*, \ldots, z_{j-1}^*)}$ dla $j = 1, \ldots, r-1$, a zatem

$$\sum_{j=1}^{r} z_j^* \in \Gamma_r.$$

Udowodnimy teraz dwa oszacowania.

1. $|||\sum_{j=1}^r z_j||| \gtrsim r^2$. Istotnie,

$$\left|\left|\left|\sum_{j=1}^{r} z_j\right|\right|\right| \geqslant r\left(\sum_{j=1}^{r} z_j^*\right)\left(\sum_{j=1}^{r} z_j\right) \geqslant r(r(1-\delta) - r(r-1)\delta) \geqslant r(r-1).$$

2. $|||\sum_{j=1}^r (-1)^j z_j||| \lesssim r$. Zauważmy wpierw, że wprost z nierówności trójkąta mamy $|||\sum_{j=1}^r (-1)^j z_j||| \leqslant r$. Aby oszacować drugi składnik pod znakiem maksimum w definicji normy $|||\cdot|||$, ustalmy dowolny funkcjonał $w^* \in \Gamma_r$ i niech $w^* = w_1^* + \ldots + w_r^*$ będzie jego przedstawieniem jak w definicji zbioru Γ_r. Określmy

$$t = \max\bigl\{i \in \{1, \ldots, r\} \colon w_i^* = z_i^*\bigr\}$$

Zauważmy, że $|w_i^*(z_j)| < \delta$, gdy $i \neq j$, bądź gdy $i = j > t+1$; wynika to z faktu, że σ jest różnowartościowa. Mamy też $1 - \delta < w_i^*(z_i) \leqslant 1$ dla $i \leqslant t$. Zatem

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{r}(-1)^j w_j^*(z_j)\right| &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{t}(-1)^j z_j^*(z_j)\right| + |w_{t+1}^*(z_{t+1})| + \sum_{j=t+2}^{r}|w_j^*(z_j)|\Bigg| \leqslant \\ &\leqslant 1 + \frac{\delta r}{2} + 1 + \delta r \leqslant 2(1+\delta r),\end{aligned}$$

skąd

$$w^*\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^j z_j\right) \leqslant \left|\sum_{j=1}^{r}(-1)^j w_j^*(z_j)\right| + \sum_{i\neq j}|w_i^*(z_j)| \leqslant 2(1+\delta r) + \delta r(r-1).$$

W konsekwencji

$$\left|\left|\left|\sum_{j=1}^{r}(-1)^j z_j\right|\right|\right| \leqslant \max\bigl\{r,\, r(2(1+\delta r) + \delta r(r-1))\bigr\} < 4r,$$

co kończy dowód. $\square$

Aby udowodnić dystorsowalność przestrzeni Schlumprechta $\mathcal{S}$ wystarczy więc wykazać, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje w niej asymptotyczny układ biortogonalny ze stałą δ, a tak naprawdę – że układy takie istnieją w samej przestrzeni $(c_{00}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$, której uzupełnieniem jest przestrzeń $\mathcal{S}$.

Dla dalszych celów, związanych z konstrukcją Gowersa–Maureya, którą zajmiemy się w następnej kolejności, wygodnie będzie posługiwać się nie tyle samą funkcją $\log_2(x+1)$, co całą klasą pewnych specjalnych funkcji.

Definicja 3.2.4. Niech $\mathcal{F}$ będzie klasą funkcji $f\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ spełniających następujące warunki:

1. $f(1) = 1$ oraz $f(x) < x$ dla $x > 1$;
2. $f \nearrow \infty$ przy $x \to \infty$;
3. $\lim_{x\to\infty} x^{-p} f(x) = 0$ dla każdego $p > 0$;
4. $\frac{x}{f(x)}$ jest wklęsła i rosnąca;
5. f jest podmultiplikatywna, tzn. $f(xy) \leqslant f(x)f(y)$ dla $x, y \in [1,\infty)$.

Niech $\mathfrak{X}$ będzie klasą wszystkich przestrzeni unormowanych $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$, dla których $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest znormalizowaną bazą monotoniczną (jest to baza o stałej bazowej równej 1). Dla $X \in \mathfrak{X}$ oraz $f \in \mathcal{F}$ powiemy, że $X \in \mathfrak{X}$ *spełnia dolne f-oszacowanie*, jeżeli

$$\|x\| \geqslant \sup\left\{ \frac{1}{f(N)} \sum_{j=1}^{N} \|E_j x\| \colon E_1 < \ldots < E_n \text{ są przedziałami w } \mathbb{N} \right\}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą bimonotoniczną, tzn. $\|Ex\| \leqslant \|x\|$ dla każdego $x \in X$ i każdego (skończonego lub nie) przedziału $E \subset \mathbb{N}$.

Wprowadzimy jeszcze jedną definicję (dla $x, y \in c_{00}$ piszemy $x < y$, jeżeli $\operatorname{supp}(x) < \operatorname{supp}(y)$).

Definicja 3.2.5. Niech $X \in \mathfrak{X}$. Wektor $x \in X$ nazwiemy *ℓ_{1+}^k-średnią ze stałą* $C > 0$, jeśli $\|x\| = 1$ oraz $x = x_1 + \ldots + x_k$, przy czym $x_1 < \ldots < x_k$ oraz $\|x_i\| \leqslant Ck^{-1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Podobnie, wektor $x \in X$ nazwiemy *ℓ_{1+}^k-wektorem ze stałą C*, jeśli jest wielokrotnością pewnej ℓ_{1+}^k-średniej ze stałą C, a więc wtedy, gdy $x = x_1 + \ldots + x_k$ dla pewnych $x_1 < \ldots < x_k$ spełniających $\|x_i\| \leqslant Ck^{-1}\|x\|$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$.

Lemat 3.2.6. *Niech $f \in \mathcal{F}$ oraz niech $X \in \mathfrak{X}$ spełnia dolne f-oszacowanie. Wówczas dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $C > 1$ każda podprzestrzeń blokowa $Y \subset X$ zawiera ℓ_{1+}^n-średnią ze stałą C.*

Dowód. Weźmy $k \in \mathbb{N}$ tak duże, aby $C^k > f(n^k)$ (istnienie k gwarantuje nam warunek 3 z definicji rodziny $\mathcal{F}$) i połóżmy $N = n^k$. Rozważmy dowolne wektory jednostkowe $x_1 < \ldots < x_N$ w Y oraz ich sumę $x = x_1 + \ldots + x_N$. Dla dowolnego $0 \leqslant i \leqslant k$ podzielmy przedział $\{1, 2, \ldots, n^k\}$ na n^{k-i} kolejnych części długości n^i i określmy

$$x(i,j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t \quad \text{dla } j = 1, \ldots, n^{k-1}.$$

Załóżmy, że dla każdej pary (i,j) jak wyżej wektor $x(i,j)$ nie jest ℓ_{1+}^n-wektorem. Wówczas

$$\forall_{1 \leqslant j \leqslant n^{k-1}} \quad 1 > \|x(1,j)\| \cdot Cn^{-1}.$$

Mamy także

$$\forall_{1 \leqslant j \leqslant n^{k-1}} \quad \exists_{(j-1)n+1 \leqslant j_{1,2} \leqslant jn} \quad \|x(1, j_{1,2})\| > \|x(2,j)\| \cdot Cn^{-1}.$$

Przez prostą indukcję otrzymujemy więc:

$$\forall_{1 \leqslant i \leqslant k} \quad \forall_{1 \leqslant j \leqslant n^{k-i}} \quad \|x(i,j)\| < C^{-i} n^i.$$

W szczególności,

$$\|x\| = \|x(k,1)\| < C^{-k} n^k = C^{-k} N.$$

Ponieważ jednak X spełnia dolne f-oszacowanie, mamy $\|x\| \geqslant Nf(N)^{-1}$, co daje sprzeczność wobec wyboru liczby k. □

Lemat 3.2.7. *Niech $M, N \in \mathbb{N}$ oraz $C \geqslant 1$. Niech także $X \in \mathfrak{X}$ oraz $x \in X$ będzie ℓ_{1+}^N-wektorem ze stałą C. Wówczas, dla dowolnych przedziałów $E_1 < \ldots < E_M$ mamy*

$$\sum_{j=1}^{M} \|E_j x\| \leqslant C\Big(1 + \frac{2M}{N}\Big)\|x\|.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\|x\| = N$. Niech $x = x_1 + \ldots + x_N$, gdzie $x_1 < \ldots < x_N$ oraz $\|x_j\| \leqslant C$ dla $1 \leqslant j \leqslant N$. Dla dowolnego $j \in \{1, \ldots, M\}$ mamy

$$\|E_j x\| \leqslant \Bigg\| \sum_{E_j(x_i) \neq 0} x_i \Bigg\| \leqslant C \cdot \#\{i : \mathrm{supp}(x_i) \subset E_j\} + 2C.$$

Zauważmy też, że

$$\sum_{j=1}^{M} \#\{i : \mathrm{supp}(x_i) \subset E_j\} \leqslant N,$$

a więc po zsumowaniu poprzednich nierówności stronami (dla $j = 1, \ldots, M$) otrzymujemy tezę. □

Następująca definicja ma kluczowe znaczenie dla dowodu twierdzenia

Definicja 3.2.8. Powiemy, że ciąg $x_1 < \ldots < x_N$ wektorów przestrzeni $X \in \mathfrak{X}$ jest *ciągiem szybkorosnącym ze stałą* $1+\varepsilon$ (*o długości* N), jeżeli dla każdego $i \in \{1, \ldots, N\}$ wektor x_i jest $\ell_{1+}^{n_i}$-średnią ze stałą $1+\varepsilon$, przy czym liczby naturalne n_i spełniają następujące warunki:

$$n_1 \geqslant 2(1+\varepsilon)\frac{M_f(\frac{N}{\varepsilon'})}{\varepsilon' f'_+(1)}, \tag{SR1}$$

$$\frac{\varepsilon'}{2}\sqrt{f(n_k)} \geqslant \#\mathrm{supp}(x_{k-1}), \tag{SR2}$$

przy czym $M_f(x) := f^{-1}(36x^2)$. *Wektorem szybkorosnącym (ze stałą $1+\varepsilon$ o długości N)* nazywać będziemy sumę szybkorosnącego ciągu (ze stałą $1+\varepsilon$ o długości N).

Niech $M \in \mathbb{N}$ oraz $g \in \mathcal{F}$. Funkcjonał $x^* \in X^*$ nazwiemy *(M,g)-formą*, jeśli $\|x^*\| \leqslant 1$ oraz

$$x^* = \sum_{j=1}^{M} x_j^*$$

dla pewnego ciągu niezerowych funkcjonałów $x_1^* < \ldots < x_M^*$ spełniających $\|x_i^*\| \leqslant g(M)^{-1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant M$.

Lemat 3.2.9. *Niech $f, g \in \mathcal{F}$, $g \geqslant f^{\frac{1}{2}}$ i niech $X \in \mathcal{X}$ spełnia dolne f-oszacowanie. Niech $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_N$ - szybkorosnący wektor ze stałą $1+\varepsilon$ i niech $x = \sum x_i$. Niech x^* będzie (M,g) formą z $M \geqslant M_f(\frac{N}{\varepsilon'})$. Wówczas, dla dowolnego przedziału E mamy $|x^*(Ex)| \leqslant 1 + \varepsilon + \varepsilon'$.*

Dowód. Na początku dowodu zauważmy, że możemy opuścić przedział E w dowodzonej tezie, jako że $x^*(Ex) = (Ex^*)(x)$, a funkcjonał Ex^* również ma przedstawienie jako suma M składników o rosnących nośnikach, których normy nie przekraczają $g(M)^{-1}$.

Dla $i \in \{1, \ldots, N\}$, niech n_i będzie maksymalnym n takim, że x_i jest l_{1+}^n sumą ze stałą $1+\varepsilon$. Połóżmy $E_j = \mathrm{ran}(x_j^*)$ (najmniejszy przedział zawierający $\mathrm{supp} x_j^*$). Wówczas

$$|x^*(x_i)| \leqslant 1, \text{ bo } ||x^*||, ||x_i|| \leqslant 1,$$
$$||x_j^*|| \leqslant g(M)^{-1} \leqslant f(M)^{-\frac{1}{2}}.$$

Stąd dla każdego $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$|x^*(x_i)| \leqslant f(M)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{M} ||E_j x_i||. \tag{7}$$

Niech $t = \max\{i : n_i \leqslant M\}$. Mamy oczywiście

$$|x^*(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{t-1} |x^*(x_i)| + |x^*(x_t)| + \sum_{i=t+1}^{N} |x^*(x_i)|.$$

Powracając do (7) będziemy szacować dwa ostatnie składniki. Z poprzedniego lematu dostajemy

$$|x^*(x_t)| + \sum_{i=t+1}^{N} |x^*(x_i)| \leqslant 1 + (1+\varepsilon)(1 + 2Mn_i^{-1}) f(M)^{-\frac{1}{2}} \leqslant 3(1+\varepsilon) f(M)^{-\frac{1}{2}}.$$

Aby ograniczyć pierwszą część zauważmy, że z definicji ciągu szybkorosnącego

$$f(\#\mathrm{supp}(x_{t-1})) \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} f(n_t)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} f(M)^{\frac{1}{2}},$$

a także

$$f(\#\mathrm{supp}(x_{t-1})) \leqslant 2^{-i+1} f(\#\mathrm{supp}(x_{t-1})) \text{ dla } i = 2, 3 \ldots, t-1.$$

Z dolnego f oszacowania otrzymujemy więc nierówność

$$\sum_{i=1}^{t-1} |x^*(x_i)| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{4} + \ldots < \varepsilon'.$$

Ostatecznie,

$$\begin{aligned}|x^*(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |x^*(x_i)| &\leqslant \varepsilon' + 1 + 3(1+\varepsilon)(N-t)f(M)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\leqslant 1 + \varepsilon' + 3(1+\varepsilon)N \cdot \frac{\varepsilon'}{6N} \leqslant 1 + \varepsilon' + \frac{\varepsilon'(1+\varepsilon)}{2} \leqslant \\ &\leqslant 1 + \varepsilon' + \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Wniosek 3.2.10. *Przy poprzednich założeniach, dla każdego ciągu przedziałów $E_1 < \ldots < E_M$ mamy*

$$\frac{1}{f(M)} \sum_{j=1}^{M} ||E_j x|| \leqslant 1 + \varepsilon + \varepsilon'.$$

Dowód. Niech x_j^* będzie funkcjonałem podpierającym $E_j x$ i określmy

$$x^* = \frac{1}{f(M)} \sum_{j=1}^{M} x_j^*.$$

Teraz wystarczy zauważyż, że jest to forma. □

Wprowadzimy teraz trochę notacji. Niech $x_1 < \ldots < x_N$ będzie szybko rosnącym ciągiem. Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ określamy n_i jako największe $n \in \mathbb{N}$ takie, że x_i jest l_{1+}^n średnią. Dla dowolnego przedziału E określamy długość $\lambda(E)$ za pomocą wzoru

$$\lambda(E) = j_E - i_E + \left(\frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}}\right), \text{ gdzie}$$
$$i_E = \min\{i : Ex_i \neq 0\},$$
$$j_E = \max\{j : Ex_j \neq 0\},$$
$$r_E = \min\{r : Ex_{i_E,r} \neq 0\},$$
$$s_E = \max\{s : Ex_{j_E,s} \neq 0\}.$$

Lemat 3.2.11. *Niech $f, g \in \mathcal{F}$, $g \geqslant f^{\frac{1}{2}}$, $X \in \mathcal{X}$ spełnia dolne f-oszacowanie, $\varepsilon > 0$ i niech $x_1 < \ldots < x_N$ będzie szybko rosnącym ciągiem ze stałą $1+\varepsilon$. Załóżmy, że*

$$||Ex|| \leqslant \sup\{|x^*(Ex)| : x^* \text{ jest } (M,g)\text{-formą z } M \geqslant 2\}$$

dla każdego przedziału z $\lambda(E) \geqslant 1$. Wówczas $||x|| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')Ng(N)^{-1}$.

Dowód. Określmy funkcję $G : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ za pomocą wzoru $G(x) = fracxg(x)$ dla $x \geqslant 1$ oraz $G(x) = x$ dla $x \in [0,1)$. Będziemy dążyli do dowodu silniejszej tezy.
(1) $||Ex|| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda(E))$, gdy $\lambda(E)$ jest dostatecznie duże (wtedy weźmiemy E spełniające $\lambda(E) = N$).
Zatem, jeśli

$$(1+\varepsilon)(\lambda(E) + n_i^{-1}) \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')\lambda(E),$$

czyli jeżeli
(2) $\lambda(E) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1}$,
to $||Ex|| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')\lambda(E)$. Stąd (1) zachodzi dla każdego E z $\lambda(E) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1}$ i $\lambda(E) \leqslant 1$. Z (3.2.11) mamy $||Ex|| = |x^*(Ex)|$ dla pewnej (M,g) formy,

$$x^* = \sum_{i=1}^{M} x_i^*.$$

Określmy $E_i = \operatorname{ran}(x_i^*) \cap E$ (pracujemy z E spełniającymi $\lambda(E) \geqslant 1$). Wówczas

$$||Ex|| \leqslant g(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} ||E_i x||,$$

a z bimotoniczności bazy (e_n) możemy założyć, że E_i pokrywają E. To jest koniec, jeśli $M \geqslant M_f\left(\frac{N}{\varepsilon'}\right)$. Przyjmijmy zatem, iż $M < M_f\left(\frac{N}{\varepsilon'}\right)$. Załóżmy teraz, że teza lematu jest fałszywa i niech E będzie minimalnym przedziałem o λ-długości $\geqslant 1$, dla którego (3.2.11) nie zachodzi. Napiszmy

$$||Ex|| \leqslant \frac{G(M)}{M}\left(\sum_{i\in A} ||E_i x|| + \sum_{j \in B} ||E_j x||\right), \text{ gdzie}$$

$$A = \{i : 1 \leqslant\ i \leqslant M \text{ oraz } \lambda(E_i) < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1},$$

$$B = \{1, \ldots, M\} \setminus A.$$

Z minimalności E dostajemy inkluzję

$$B \subset \{i : ||E_i x|| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda(E_i))\}.$$

Wprowadźmy parametr $t = \frac{\#A}{M}$ i zauważmy, że $t < 1$. W związku z tym, możemy przyjąć $M < M_f\left(\frac{N}{\varepsilon'}\right)$. Z warunku definiującego ciąg szybko rosnący,

$$n_1 \geqslant \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon' f'(1)} M_f\left(\frac{N}{\varepsilon'}\right) > \frac{2(1+\varepsilon)M}{\varepsilon' f'(1)}.$$

Stąd
$$1 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1} \cdot \frac{2M}{f'(1)} > \lambda(E_i) \cdot 2M.$$
Jeśli $A = \{1, \ldots, M\}$, to mielibyśmy $\lambda(E_i) < \frac{1}{2M}$ dla każdego i. Zatem
$$\lambda(E) - \frac{M}{n_1} \leqslant \sum_{i=1}^{M} \lambda(E_i) < \frac{1}{2}.$$
To daje
$$\lambda(E) < \frac{1}{2} + \frac{M}{n_1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
co jest oczekiwaną sprzecznością.
Powracając do naszego oszacowania na $||Ex||$ otrzymujemy
$$\begin{aligned} \sum_{i \in A} ||E_i x|| &\leqslant (\#A)(1+\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1} + \frac{1}{n_1}\right) \\ &= (\#A)(1+\varepsilon+\varepsilon')\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1}. \end{aligned}$$
Także,
$$\begin{aligned} \sum_{j \in B} ||E_j x|| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon') \sum_{j \in B} G(\lambda(E_j)) \leqslant \\ (M - \#A)(1+\varepsilon+\varepsilon') G\left(\frac{\lambda(E)}{M - \#A}\right), \end{aligned}$$
bo G jest wklęsła i
$$\sum_{j=1}^{M} \lambda(E_j) \leqslant \lambda(E).$$
Zatem,
$$\begin{aligned} ||Ex|| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')\left(\frac{(\#A)(1+\varepsilon)}{\varepsilon' n_1} + (1-t)G(M) \cdot G\left(\frac{\lambda(t)}{M - \#A}\right)\right) \leqslant \\ (1+\varepsilon+\varepsilon')\left(\frac{(\#A)(1+\varepsilon)}{\varepsilon' n_1} + (1-t)G\left(\frac{\lambda(E)}{1-t}\right)\right). \end{aligned}$$
Z warunku określajacego ciąg szybko rosnący dostajemy
$$\frac{(\#A)(1+\varepsilon)}{\varepsilon' n_1} \leqslant t \cdot \frac{(1+\varepsilon) M_f\left(\frac{N}{\varepsilon'}\right)}{\varepsilon' n_1} \leqslant t \cdot \frac{f'(1)}{2} \leqslant t g'(1).$$
Dalej,
$$t g'(1) + (1-t) G\left(\frac{\lambda(E)}{1-t}\right) = t(G(1) - G'(1)) + (1-t) G\left(\frac{\lambda(E)}{1-t}\right) \leqslant G(\lambda(E))$$
z wklęsłości G. Ostatecznie dostajemy $||Ex|| \leqslant 1+\varepsilon+\varepsilon'$, co kończy dowód. $\square$

Możemy teraz powrócić do dowodu twierdzenia Schlumprechta o dystorsowalności. Niech $\delta \in (0,1)$. W oparciu o poprzednie rozważania wystarczy pokazać, że $\mathcal{S}$ zawiera asymptotyczny układ biortogonalny ze stałą δ.
Niech $N_1 < N_2 < \ldots$ będzie ciągiem skalarów spełniających

$$\frac{f(N_1)}{N_1} < \frac{\delta}{2},\ f(N_1) > \frac{8}{\delta} \text{ i } N_j > M_f(2N_{j-1}) \text{ dla } j \geqslant 2.$$

Zdefiniujemy najpierw zbiory A_k i A_k^*.

$$A_k = \{x = \sum_{j=1}^{N_k} x_j : ||x|| = 1 \text{ i } x_1 < \ldots < x_N$$

$$\text{jest niewiększą niż } \frac{f(N_k)}{N_k} \text{ wielokrotnością szybkorosnącego ciągu ze stałą } 1 + \frac{\delta}{2}\}$$

$$A_k^* = \{x^* = f(N_k)^{-1} \sum_{j=1}^{N_k} x_j^* : x_1^* < \ldots < x_{N_k}^* \text{ i } ||x_j^*|| \leqslant 1 \text{ dla } 1 \leqslant j \leqslant N_k\}.$$

Wiemy już, że A_k jest asymptotyczne. Teraz, ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i weźmy $x \in A_k$ oraz $y^* \in A_j^*$ dla $k \neq j$ (oczywiście y^* jest (N_j, f) formą). Rozważmy dwa przypadki.
1. Jeśli $j > k$, to z Lematu 3.2.9 zastosowanego z $\varepsilon = \frac{1}{2}$ oraz obserwacji $N_j > M_f(\frac{N_k}{\varepsilon'})$ dostajemy

$$|y^*(x)| \leqslant 2\frac{f(N_k)}{N_k} < \delta.$$

2. W przypadku, gdy $j < k$ w oparciu o Lemat 3.2.11 mamy dla każdego $A \subset \{1, \ldots, N_k\}$

$$\|\sum_{i \in A} x_i\| \leqslant 2 \cdot \frac{\#A}{f(\#A)} \cdot \frac{f(N_k)}{N_k}.$$

Jeśli $\#A \geqslant \sqrt{N_k}$, to prawa strona jest niewiększa niż $4(\#A)N_k^{-1}$. Stąd, gdy podzielimy x na $\sqrt{N_k}$ kolejnych części o długości $\sqrt{N_k}$, to widzimy, że x jest $l_{1+}^{\sqrt{N_k}}$ średnią ze stałą 4. Z Lematu 3.2.7 mamy

$$|y^*(x)| \leqslant f(N_j)^{-1} \cdot 4(1 + 2N_jN_k^{-\frac{1}{2}}) \leqslant 8f(N_j) < \delta.$$

Ostatecznie, dla ustalonego $x \in A_k$, $x = x_1 + \ldots + x_{N_k}$ z Lematu 3.2.9

$$||x|| \leqslant (1+\delta)N_k f(N_k)^{-1}||x_i|| \text{ dla każdego } i.$$

Niech x_i^* będzie funkcjonałem podpierającym dla x_i i niech

$$x^* f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} x_i^* \in A_k^*,$$

co prowadzi do $x^*(x) \geqslant (1+\delta)^{-1} > 1 - \delta$ i kończy dowód twierdzenia Schlumprechta.