5 Wykłady 12-13: Problem Schroedera-Bernsteina dla przestrzeni Banacha

5.1 Konstrukcja i przygotowanie

Zajmiemy się teraz podanym w 1996 roku przez Gowersa kontrprzykładem do własności Schroedera-Bernsteina dla przestrzeni Banacha. Chodzi o skonstruowanie takich dwóch przestrzeni Banacha X i Y, że X jest izomorficzna z pewną komplementarną podprzestrzenią Y, Y jest izomorficzna z pewną komplementarną podprzestrzenią X, a mimo to, X i Y nie są izomorficzne. Zauważmy, że wystarczy w tym celu określić przestrzeń Banacha Z, która byłaby izomorficzna ze swoim sześcianem, ale nie ze swoim kwadratem, a następnie przyjąć $X = Z$ i $Y = Z \oplus Z$.

Przypomnijmy tu twierdzenie o wspólnym ciągu przybliżonych wektorów własnych.

Twierdzenie 5.1.1. *Niech Y będzie dowolną podprzestrzenią blokową przestrzeni X_{GM} i niech $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ będzie takim ciągiem, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wektor y_n jest ℓ_{1+}^n-średnią ze stałą $1 + \varepsilon/4$, przy czym $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Wówczas dla każdego operatora $T \in \mathscr{B}(X_{GM})$ istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$, że*

$$T(y_n) - \lambda y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Co więcej, liczba ta zależy wyłącznie od T (tj. nie zależy od wyboru blokowego ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ℓ_{1+}^n-średnich). Ponadto wystarczy, aby T był określony tylko na Y.

Twierdzenie 5.1.2 (Gowers, 1996)**.** *Istnieje taka przestrzeń Banacha Z, że $Z \cong Z \oplus Z \oplus Z$ oraz $Z \ncong Z \oplus Z$.*

Na początek opiszemy definicję przestrzeni Z oraz omówimy ogólną strategię dowodu twierdzenia 5.1.2. Głównym składnikiem konstrukcji jest przestrzeń Gowersa-Maureya; od tej pory symbolem X oznaczamy właśnie przestrzeń X_{GM} rozważaną nad ciałem $\mathbb{R}$. Przypomnijmy tu dwie kluczowe własności tej przestrzeni, które będą dalej wykorzystywane:

(a) Jeśli $x_1 < \ldots < x_N$ jest ciągiem wektorów blokowych w X, to

$$\|x_1 + \ldots + x_N\| \geqslant \frac{1}{\log_2(N+1)}\big(\|x_1\| + \ldots + \|x_N\|\big)$$

(jest to po prostu dolne f-oszacowanie dla przestrzeni X).

(b) Dla każdego operatora $T \in \mathscr{B}(X)$ istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$, że

$$T(x_n) - \lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dla każdego ciągu ℓ_{1+}^n-średnich x_n ze stałą $1+\varepsilon/4$, gdzie $\varepsilon = \frac{1}{10}$, wybranych z dowolnej podprzestrzeni blokowej przestrzeni X (jest to treść twierdzenia 5.1.1, które jest konsekwencją lematu o przesunięciu).

Niech $W = X \oplus_\infty X$ i niech $W_1, W_2, \dots$ będzie ciągiem izometrycznych kopii przestrzeni W:

$$W_1 = X_1 \oplus_\infty X_2, \quad W_2 = X_3 \oplus_\infty X_4, \dots,$$

przy czym X_n ($n \in \mathbb{N}$) są izometrycznymi kopiami przestrzeni X. Zdefiniujemy najpierw pewną przestrzeń Banacha $\mathbb{W}$ o bezwarunkowym rozkładzie Schaudera postaci

$$\mathbb{W} = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \tag{W}$$

czyli też postaci

$$\mathbb{W} = (X_1 \oplus X_2) \oplus (X_3 \oplus X_4) \oplus \dots. \tag{X}$$

(W przyszłości będziemy kilkukrotnie mówili o rozłączności, czy też monotoniczności, nośników wektorów z przestrzeni $\mathbb{W}$; można tę rozłączność/monotoniczność rozumieć zarówno względem rozkładu (W), jak i (V), co będziemy się starali za każdym razem stosownie zaznaczać.)

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową tych ciągów $\boldsymbol{w} = (w_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty W_n$, dla których $w_n \neq 0$ dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Aby zdefiniować normę na $\mathbb{V}$, ustalmy jakikolwiek znormalizowany ciąg wektorów blokowych $x_1 < x_2 < \dots$ w X spełniający powyższy warunek (b) pochodzący z lematu o przesunięciu. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybierzmy także dowolnie funkcjonał $x_n^* \in X^*$ spełniający warunki: $\|x_n^*\| = 1$, $x_n^*(x_n) = 1$ oraz $\operatorname{ran}(x_n^*) = \operatorname{ran}(x_n)$. Podkreślmy, że od tej chwili ciągi $(x_n)_{n=1}^\infty$ i $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ są ustalone aż do końca rozdziału.

W przestrzeni $W = X \oplus_\infty X$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, możemy rozważać wektory: (x_n, x_n), $(x_n, 0)$ i $(0, x_n)$, a także działające na niej funkcjonały: (x_n^*, x_n^*), $(x_n^*, 0)$ i $(0, x_n^*)$. Możemy więc rozważać kopie tych wektorów/funkcjonałów na każdej z przestrzeni $W_1, W_2, \dots$; dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ wprowadzamy następujące oznaczenia:

- u_{ij} : kopia wektora (x_i, x_i) w W_j, u_{ij}^* : kopia funkcjonału (x_i^*, x_i^*) w W_j^*,
- v_{ij} : kopia wektora $(x_i, 0)$ w W_j, v_{ij}^* : kopia funkcjonału $(x_i^*, 0)$ w W_j^*,
- w_{ij} : kopia wektora $(0, x_i)$ w W_j, w_{ij}^* : kopia funkcjonału $(0, x_i^*)$ w W_j^*.

Oczywiście, w naturalny sposób, każdy z tych wektorów (funkcjonałów) możemy traktować jako element przestrzeni $\mathbb{V}$ (odpowiednio – funkcjonał liniowy na $\mathbb{V}$).

Ustalmy dowolny podział

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{4} \mathbb{N}_i$$

zbioru liczb naturalnych na nieskończone, parami rozłączne zbiory $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_2$, $\mathbb{N}_3$, $\mathbb{N}_4$. Dla dowolnego wektora $\boldsymbol{w} = (w_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{V}$ określamy jego normę według wzoru:

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{w}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|w_n\| \vee \sup_{i\in\mathbb{N}_1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|u_{ij}^*(\boldsymbol{w})|^2\right)^{1/2} \vee \\
\vee \sup_{i\in\mathbb{N}_2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|v_{ij}^*(\boldsymbol{w})|^2\right)^{1/2} \vee \sup_{i\in\mathbb{N}_3}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|w_{ij}^*(\boldsymbol{w})|^2\right)^{1/2} \vee \\
\vee \sup_{i\in\mathbb{N}_4}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\big(|v_{ij}^*(\boldsymbol{w})|^4 + |w_{ij}^*(\boldsymbol{w})|^4\big)\right)^{1/4}.
\end{aligned}
$$

Przestrzeń Banacha $\mathbb{W}$ definiujemy zaś jako uzupełnienie przestrzeni $\mathbb{V}$ względem wyżej określonej normy.

Przestrzenią, o której mowa w twierdzeniu 5.1.2, będzie przestrzeń Banacha

$$Z = X \oplus \mathbb{W}.$$

Zauważmy, że jest ona izomorficzna z podprzestrzenią $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$ zdefiniowaną jako

$$\mathbb{U} = X_2 \oplus (X_3 \oplus X_4) \oplus \ldots$$

(pomijamy pierwszy składnik z rozkładu Schaudera (X)). Jest oczywiste, że tak określona przestrzeń Z jest izomorficzna ze swoim sześcianem, jej kwadrat jest zaś izomorficzny z $\mathbb{W}$. Aby więc udowodnić twierdzenie 5.1.2, pozostaje wykazać następujące zdanie:

Przestrzeń $\mathbb{W}$ *nie jest izomorficzna ze swoją podprzestrzenią* $\mathbb{U}$. (1)

Omówimy teraz strategię dowodu powyższego stwierdzenia.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje pewien izomorfizm $T\colon \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ i niech $P\colon \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ będzie naturalnym rzutowaniem ignorującym współrzędną pochodzącą od składnika X_1 w rozkładzie (X). Niech także $S = T^{-1}P$. Operator ten jest lewostronną odwrotnością operatora T, tj. $ST = I_{\mathbb{W}}$; mamy także $TS = P$. Użyjemy specyfiki przestrzeni Gowersa-Maureya w tym celu, aby przetłumaczyć powyższą sytuację na algebrę operatorów ograniczonych na c_0. Mówiąc dokładniej, użyjemy własności (b), aby zdefiniować homomorfizm algebr Banacha $\Phi\colon \mathscr{B}(\mathbb{W}) \to \mathscr{B}(c_0)$. Powyższe dwie równości dadzą wówczas:

$$\Phi(S)\Phi(T) = \Phi(ST) = \Phi(I_{\mathbb{W}}) = I_{c_0}$$

oraz

$$\Phi(T)\Phi(S) = \Phi(TS) = \Phi(P) =: Q,$$

przy czym (co, jak się okaże, wynikać będzie wprost z definicji Φ) operator Q jest projekcją określoną na c_0, zerującą pierwszą współrzędną. Wynikałoby stąd, że $\Phi(T)$ jest operatorem różnowartościowym, którego obraz jest podprzestrzenią przestrzeni c_0 o kowymiarze 1. W szczególności byłby to operator Fredholma o nieparzystym indeksie. Kluczowy lemat, który wykażemy w następnej sekcji, mówi jednak, że każdy operator postaci $\Phi(T)$ (dla dowolnego $T \in \mathscr{B}(\mathbb{W})$), jeśli jest operatorem Fredholma, to ma indeks parzysty. Zastanówmy się teraz, dlaczego miałaby to być prawda.

Operatory działające na c_0 możemy zapisać w postaci macierzy klatkowej przez utożsamienie $c_0 \cong c_0 \oplus c_0$. Dokładniej, niech odwzorowanie $i\colon c_0 \to c_0 \oplus c_0$ będzie dane jako

$$i\big((x_n)_{n=1}^{\infty}\big) = \big((x_1, x_3, \ldots), (x_2, x_4, \ldots)\big),$$

a dla dowolnego operatora $\Lambda \in \Phi(\mathscr{B}(\mathbb{W})) \subseteq \mathscr{B}(c_0)$ niech $\widetilde{\Lambda} = i\Lambda i^{-1}$. Operator ten działa z $c_0 \oplus c_0$ do $c_0 \oplus c_0$, ma więc postać macierzy klatkowej

$$\widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

dla odpowiednich $A, B, C, D \in \mathscr{B}(c_0)$. Aby wykazać zapowiedzianą tezę, wystarczy udowodnić, że następujące operatory: B, C i $A - D$ są ściśle singularne. Wówczas bowiem $\widetilde{\Lambda}$ byłby ściśle singularną perturbacją operatora

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

który oczywiście – o ile jest operatorem Fredholma – ma indeks parzysty. Norma na przestrzeni $\mathbb{V}$ została skonstruowana właśnie w taki sposób, aby zagwarantować ścisłą singularność wymienionych operatorów. Przykładowo, operator $B\colon c_0 \to c_0$ (rozumowanie dla C będzie zupełnie analogiczne, zaś dla $A - D$ wyniknie łatwo z tego, co pokażemy o B i C) koduje to, jak na współrzędnych o indeksach nieparzystych wyglądają obrazy wektorów skupionych na współrzędnych o indeksach parzystych. Powiedzmy, że $\Lambda = \Phi(T)$ dla pewnego $T \in \mathscr{B}(\mathbb{W})$. Mówiąc w języku operatora T: singularność B mówi coś o „zanikaniu" działania operatora T pomiędzy składnikami X_{2i} a X_{2j+1} rozkładu (X). Gdyby takiego zanikania nie było, skonstruowalibyśmy wektory z $\mathbb{W}$ świadczące o nieograniczoności operatora T. Wzór na normę w przestrzeni $\mathbb{V}$ jest wymyślony właśnie tak, aby taki argument przeforsować. Jak zobaczymy, przy pokazywaniu ścisłej singularności kolejnych operatorów: B, C i $A - D$, za każdym razem skorzystamy z innego składnika operacji $\vee$ użytej w definicji naszej normy.

To, co w tym momencie warto podkreślić, to to, że specyfika przestrzeni Gowersa-Maureya X zostanie wyeksploatowana wyłącznie w celu zdefiniowania homomorfizmu Φ (bez lematu o przesunięciu nie mamy dobrze określonego przyporządkowania $T \mapsto \lambda$ i nie bardzo wiadomo, czym miałaby być macierz $\Phi(T)$). Cała reszta dowodu oparta jest tylko na sposobie unormowania rozkładu Schaudera przestrzeni $\mathbb{W}$.

5.2 Dowód twierdzenia 5.1.2

Zacznijmy od prostego oszacowania normy w przestrzeni $\mathbb{W}$.

Lemat 5.2.1. *Dla dowolnych wektorów* $\boldsymbol{w}_1 < \ldots < \boldsymbol{w}_N$ (*uporządkowanie ze względu na rozkład* (W)) *przestrzeni* $\mathbb{W}$ *mamy*

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{w}_k \right\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} \|\boldsymbol{w}_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Dowód. Oczywiście norma każdej ze współrzędnych (w rozkładzie (W)) wektora $\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{w}_k$ nie przekracza prawej strony nierówności, a więc mamy żądane oszacowanie dla pierwszego składnika operacji maksimum w definicji normy przestrzeni $\mathbb{W}$. Dla składników odpowiadających zbiorom $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_2$ i $\mathbb{N}_3$ wystarczy skorzystać z oszacowania

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| u_{ij}^* \left(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{w}_k \right) \right|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}^*(\boldsymbol{w}_k)|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|\boldsymbol{w}_k\|^2 \quad \text{dla } i \in \mathbb{N}$$

(w pierwszym przejściu korzystamy z rozłączności nosników wektorów $\boldsymbol{w}_k$) i analogicznych oszacowań dla funkcjonałów v_{ij}^* i w_{ij}^*. W końcu, aby oszacować składnik odpowiadający $\mathbb{N}_4$, postępujemy podobnie, przy czym korzystamy z oczywistej nierówności

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha_j^4 + \beta_j^4 \right)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_j^4 + \beta_j^4}. \quad \square$$

`TBC...`