4 Wykłady 9-11: Przestrzeń Gowersa-Maureya

4.1 Konstrukcja przestrzeni Gowersa-Maureya

Przypomnijmy na początek jedną definicję i dwa lematy.

Definicja 4.1.1. Powiemy, że ciąg $x_1 < \ldots < x_N$ wektorów przestrzeni $X \in \mathfrak{X}$ jest *ciągiem szybkorosnącym ze stałą* $1+\varepsilon$ *(o długości* N*)*, jeżeli dla każdego $i \in \{1, \ldots, N\}$ wektor x_i jest $\ell_{1+}^{n_i}$-średnią ze stałą $1+\varepsilon$, przy czym liczby naturalne n_i spełniają następujące warunki:

$$n_1 \geqslant 2(1+\varepsilon)\frac{M_f(\frac{N}{\varepsilon'})}{\varepsilon' f'_+(1)}, \tag{SR1}$$

$$\frac{\varepsilon'}{2}\sqrt{f(n_k)} \geqslant \#\mathrm{supp}(x_{k-1}), \tag{SR2}$$

przy czym $M_f(x) := f^{-1}(36x^2)$. *Wektorem szybkorosnącym (ze stałą* $1+\varepsilon$ *o długości* N*)* nazywać będziemy sumę szybkorosnącego ciągu (ze stałą $1+\varepsilon$ o długości N).

Niech $M \in \mathbb{N}$ oraz $g \in \mathcal{F}$. Funkcjonał $x^* \in X^*$ nazwiemy *(M,g)-formą*, jeśli $\|x^*\| \leqslant 1$ oraz

$$x^* = \sum_{j=1}^{M} x_j^*$$

dla pewnego ciągu niezerowych funkcjonałów $x_1^* < \ldots < x_M^*$ spełniających $\|x_i^*\| \leqslant g(M)^{-1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant M$.

Lemat 4.1.2. *Niech $f, g \in \mathcal{F}$, $g \geqslant f^{\frac{1}{2}}$ i niech $X \in \mathcal{X}$ spełnia dolne f-oszacowanie. Niech $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_N$ - szybkorosnący wektor ze stałą $1+\varepsilon$ i niech $x = \sum x_i$. Niech x^* będzie (M,g) formą z $M \geqslant M_f(\frac{N}{\varepsilon'})$. Wówczas, dla dowolnego przedziału E mamy $|x^*(Ex)| \leqslant 1+\varepsilon+\varepsilon'$.*

Lemat 4.1.3. *Niech $f, g \in \mathcal{F}$, $g \geqslant f^{\frac{1}{2}}$, $X \in \mathcal{X}$ spełnia dolne f-oszacowanie, $\varepsilon > 0$ i niech $x_1 < \ldots < x_N$ będzie szybko rosnącym ciągiem ze stałą $1+\varepsilon$. Załóżmy, że*

$$||Ex|| \leqslant \sup\{|x^*(Ex)| : x^* \text{ jest } (M,g)\text{-formą z } M \geqslant 2\}$$

dla każdego przedziału z $\lambda(E) \geqslant 1$. Wówczas $||x|| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')Ng(N)^{-1}$.

Aby zdefiniować przestrzeń Gowersa-Maureya, wprowadzimy pewne oznaczenia. Od tego momentu symbol f oznacza zawsze funkcję $f(x) = \log_2(x+1)$. Niech $\mathcal{Q}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów o skończonych nośnikach, wyrazach wymiernych i ograniczonych w normie supremum przez 1. Niech J będzie ustalonym, odpowiednio „rzadkim" podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$; dokładniej – zakładamy, że

$$f(\min j) > 256 \quad \text{oraz} \quad \underset{\substack{m,n\in J\\ m>n}}{\forall} \log\log\log m > 4n^2. \tag{1}$$

Niech $J = \{j_1, j_2, \ldots\}$ będzie rosnącym ponumerowaniem elementów zbioru J; definiujemy

$$K = \{j_1, j_3, j_5, \ldots\} \quad \text{oraz} \quad L = \{j_2, j_4, j_6, \ldots\}.$$

Potrzebna nam będzie także injekcja $\sigma\colon \widetilde{\mathcal{Q}} \to L$ ze zbioru $\widetilde{\mathcal{Q}}$ wszystkich takich skończonych ciągów $(z_1, \ldots, z_k)$ o wyrazach ze zbioru $\mathcal{Q}$, że $z_1 < \ldots < z_k$. Zakładamy dodatkowo, że σ spełnia warunek:

$$\frac{1}{20}\big(f(\sigma(z_1, \ldots, z_k))^{1/40}\big)^{1/2} \geqslant \#\mathrm{supp}(z_1 + \ldots + z_k) \tag{2}$$

$(z_1 < \ldots < z_k) \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ (jest dość oczywiste, że taka funkcja σ istnieje).

W dowolnej przestrzeni unormowanej postaci $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$ określamy *funkcjonały specjalne* w sposób podobny do tego, jak zrobilismy to w dowodzie twierdzenia 3.2.3 (mówimy tutaj tylko o funkcjonałach, które mają skończone nośniki, a więc są elementami przestrzeni c_{00}). Dla $m \in \mathbb{N}$ definiujemy najpierw

$$A_m^*(X) = \left\{ \frac{1}{f(m)} \sum_{i=1}^{m} x_i^* \colon x_1^* < \ldots < x_m^* \text{ oraz } \|x_i^*\| \leqslant 1 \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant m \right\}.$$

Niech dalej $\Gamma_k(X)$ oznacza zbiór wszystkich *ciągów specjalnych* długości k, tj. takich ciągów $(z_1^* < \ldots < z_k^*)$ elementów $\mathcal{Q}$, że

$$z_1^* \in A_{j_{2k}}^*(X) \quad \text{oraz} \quad z_{i+1}^* \in A_{\sigma(z_1^*, \ldots, z_i^*)}^*(X) \quad \text{dla } 1 \leqslant i < k.$$

Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ definiujemy teraz

$$B_k^*(X) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{f(k)}} \sum_{i=1}^{k} z_i^* \colon (z_1^* < \ldots < z_k^*) \in \Gamma_k(X) \right\};$$

elementy tego zbioru nazywać będziemy *funkcjonałami specjalnymi* długości k. Możemy w końcu przejść do definicji przestrzeni Gowersa-Maureya. (Symbol $\vee$ oznaczać będzie funkcję maksimum.)

Definicja 4.1.4. Wprowadzamy indukcyjnie ciąg norm $\|\cdot\|_N$ (dla $N = 0, 1, 2, \ldots$) na c_{00} wzorami: $\|x\|_0 = \|x\|_\infty$ oraz

$$\begin{aligned} \|x\|_{N+1} = \|x\|_0 \vee \sup &\left\{ \frac{1}{f(M)} \sum_{j=1}^{M} \|E_j x\|_N \colon E_1 < \ldots < E_M \text{ są przedziałami} \right\} \\ &\vee \sup\Big\{ |z^*(Ex)| \colon k \in K,\ z^* \in B_k^*(X_N),\ E \text{ jest przedziałem} \Big\}, \end{aligned}$$

gdzie $X_N = (c_{00}, \|\cdot\|_N)$. Określamy normę $\|\cdot\|_{\mathsf{GM}}$ na c_{00} wzorem

$$\|\cdot\|_{\mathsf{GM}} = \lim_{N \to \infty} \|\cdot\|_N,$$

natomiast *przestrzeń Gowersa-Maureya*, oznaczaną w dalszym ciągu symbolem X_{GM}, definiujemy jako uzupełnienie przestrzeni $(c_{00}, \|\cdot\|_{\mathsf{GM}})$.

Uwaga 4.1.5. Ze względu na fakt, że dopuszczamy w powyższych wyrażeniach dowolne przedziały, ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą bimonotoniczną przestrzeni X_{GM}. Oczywiście, gdyby zamiast przedziałów dopuścić dowolne (skończone) podzbiory $\mathbb{N}$, otrzymana przestrzeń miałaby bazę 1-bezwarunkową (ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$), czego rzecz jasna nie chcemy – przestrzeń Gowersa-Maureya jest przykładem przestrzeni niezawierającej żadnego bezwarunkowego ciągu bazowego.

Normę w przestrzeni X_{GM} możemy też określić na następujące dwa, równoważne sposoby:

- $\|x\|_{\mathsf{GM}} = \sup\{\varphi(x)\colon \varphi \in D\}$, gdzie $D \subset c_{00}$ jest najmniejszym symetrycznym, wypukłym zbiorem, który zawiera wszystkie funkcjonały e_n^* ($n \in \mathbb{N}$), jest zamknięty na wszystkie $(\mathcal{A}_m, f(m)^{-1})$-operacje, dla $m \in \mathbb{N}$, oraz wszystkie $(\mathcal{A}_k, f(k)^{-1/2})$-operacje, dla $k \in K$;
- $\|\cdot\|_{\mathsf{GM}}$ jest jedyną normą na przestrzeni c_{00} spełniającą równanie uwikłane

$$\begin{aligned}\|x\|_{\mathsf{GM}} = &\|x\|_\infty \vee \sup\Bigg\{\frac{1}{f(M)}\sum_{j=1}^{M}\|E_jx\|_{\mathsf{GM}}\colon E_1 < \ldots < E_M \text{ są przedziałami}\Bigg\}\\ &\vee \sup\Big\{|z^*(Ex)|\colon k \in K,\ z^* \in B_k^*(c_{00}, \|\cdot\|_{\mathsf{GM}}),\ E \text{ jest przedziałem}\Big\}.\end{aligned}$$

4.2 Oszacowanie normy wektorów szybkorosnących w X_{GM}

Zasadniczym krokiem w dowodzie faktu, że przestrzeń X_{GM} nie zawiera bezwarunkowego ciągu bazowego (a nawet jest dziedzicznie nierozkładalna) jest podanie górnego oszacowania na normę sumy szybkorosnącego ciągu wektorów. Głównym narzędziem będzie tu (ponownie) lemat 4.1.3, tyle że z powodu trzeciego argumentu funkcji maksimum w definicji normy $\|\cdot\|_{\mathsf{GM}}$ nie możemy już opierać się wyłącznie na (M, f)-formach, jak to miało miejsce w przypadku przestrzeni Schlumprechta. Jeśli jednak długość danego ciągu szybkorosnącego jest dosyć „niekompatybilna" (leży niezbyt daleko od elementu zbioru L) z długością ciągów definiujących funkcjonały specjalne (które należą do K), to zmiana (M, f)-form na odpowiednie (M, g)-formy nie wpłynie na oszacowanie, które uzyskaliśmy w lemacie 4.1.3.

Lemat 4.2.1. *Jeśli $x_1 < \ldots < x_n$ jest ciągiem szybkorosnącym w X_{GM} długości $n \in [\log N, \exp N]$ dla pewnego $N \in L$ ze stałą $1 + \varepsilon$, to*

$$\Bigg\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Bigg\|_{\mathsf{GM}} \leqslant (1 + \varepsilon + \varepsilon')\frac{n}{f(n)}\,.$$

Dowód. Oznaczmy $x = x_1 + \ldots + x_n$. Sprawdzimy założenia lematu 4.1.3 (budując przy okazji odpowiednią funkcję $g \in \mathcal{F}$). Po pierwsze, jest oczywiste, że $X_{\mathsf{GM}} \in \mathfrak{X}$ oraz że X_{GM} spełnia dolne f-oszacowanie.

Dla dowolnego zbioru $K_0 \subseteq K$ definiujemy funkcję $\phi_{K_0}\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ wzorem

$$\phi_{K_0}(x) = \begin{cases} \sqrt{\log_2(x+1)} & \text{dla } x \in K_0 \\ \log_2(x+1) & \text{dla } x \notin K_0. \end{cases}$$

Opiszemy teraz procedurę, która dla każdej takiej funkcji daje funkcję $g_{K_0} \in \mathcal{F}$ spełniająca nierówności

$$\sqrt{\log_2(x+1)} \leqslant g_{K_0}(x) \leqslant \phi_{K_0}(x) \leqslant \log_2(x+1) \quad \text{dla } x \in [1,\infty). \tag{3}$$

1. Dla dowolnej funkcji $h\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ określamy jej *podmultiplikatywną otoczkę* $H\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ wzorem

   $$H(x) = \inf\big\{h(x_1)\cdot \ldots \cdot h(x_m)\colon x_1 \cdot \ldots \cdot x_m \geqslant 1 \text{ oraz } x_i \geqslant 1\big\};$$

   jest to największa funkcja podmultiplikatywna majoryzowana przez h.

2. Dla dowolnej funkcji ograniczonej $g\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ określamy jej *wklęsłą obwiednię* $G\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ wzorem

   $$G(x) = \sup\big\{\lambda g(y) + (1-\lambda)g(z)\colon 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x = \lambda y + (1-\lambda)z\big\};$$

   jest to najmniejsza funkcja wklęsła majoryzująca funkcję g.

3. Możemy teraz przystąpić do opisu naszej procedury (dla uproszczenia piszemy ϕ zamiast ϕ_{K_0}). Najpierw funkcji ϕ przyporządkowujemy jej podmultiplikatywną otoczkę h, następnie rozważamy funkcję $H(x) := xh(x)^{-1}$, której przyporządkowujemy jej wklęsłą obwiednię G. Na koniec definiujemy funkcję g wzorem $g(x) = xG(x)^{-1}$.

Aby wykazać, że tak zdefiniowana funkcja g należy do klasy $\mathcal{F}$, należy jedynie sprawdzić nadmultiplikatywność funkcji G (pozostałe własności są albo oczywiste, albo – jak w przypadku monotoniczności funkcji $g(x)$ i $xg(x)^{-1}$ – wynikają z pozostałych). Wynika ona z następującego lematu, którego elementarny dowód pominiemy: wklęsła obwiednia dowolnej funkcji nadmultiplikatywnej $[1,\infty) \to [1,\infty)$ jest nadmultiplikatywna. Nierówności (3) wynikają wprost z konstrukcji.

Zauważmy teraz, że wprost z definicji normy w przestrzeni X_{GM} wynika, że norma każdego wektora $x \in X_{\mathsf{GM}}$ jest albo równa $\|x\|_\infty$, albo dana przez wartość pewnej (M,ϕ)-formy na x (gdzie $\phi = \phi_K$). Ponieważ zaś $g \leqslant \phi$ (gdzie $g = g_K$), każda (M,ϕ)-forma jest także (M,g)-formą. Znaleźliśmy zatem funkcję $g \in \mathcal{F}$ spełniającą warunek $g \geqslant f^{1/2}$ i o tej własności, że dla każdego $x \in X_{\mathsf{GM}}$ mamy

$$\|x\|_{\mathsf{GM}} = \|x\|_\infty \ \text{ lub } \ \|x\|_{\mathsf{GM}} = \sup\Big\{|z^*(x)|\colon z^* \text{ jest } (M,g)\text{–formą, gdzie } M \geqslant 2\Big\}.$$

Ponadto, dla dowolnego przedziału $E \subset \mathbb{N}$, dla którego $\lambda(E) \geqslant 1$ (długość rozumiana względem ciągu $x_1 < \ldots < x_n$), mamy oczywiście $\|Ex\|_{\mathsf{GM}} > \|Ex\|_\infty$, a zatem dla każdego tego typu wektora Ex zachodzi drugi człon powyższej alternatywy (z Ex w miejscu x). Z lematu 4.1.3 otrzymujemy w takim razie oszacowanie

$$\|x\| \leqslant (1+\varepsilon+\varepsilon')\frac{n}{g(n)};$$

pozostaje więc wykazać, że $g(n) = f(n)$ dla każdego $n \in [\log N, \exp N]$.

Wykażemy więc, że dla każdego $K_0 \subset K$ i $N \in J \setminus K_0$ mamy $g_{K_0}(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [\log N, \exp N]$. W tym celu pokażemy najpierw, że na nieco większym przedziale równają się funkcje h i f, gdzie h to podmultiplikatywna otoczka ϕ_{K_0} (porównaj punkt 3 wyżej); dokładniej – wykażemy, że

$$h(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in [\log\log N, \exp\exp N]. \tag{4}$$

Określmy liczby k i l wzorami

$$k = \max\{m \in K_0 \cup \{1\} \colon m < N\} \quad \text{oraz} \quad l = \min\{m \in K_0 \colon N < m\}.$$

Rozważać będziemy teraz liczby x spełniające nierówności

$$(k!)^4 < x < f^{-1}(f(l)^{1/2}),$$

a zatem należące do przedziału zawierającego $[\log\log N, \exp\exp N]$ i zawartego w $[\log\log\log N, \exp\exp\exp N]$. Weźmy takie liczby $x_1, \ldots, x_m > 1$, że

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_m \geqslant x \quad \text{oraz} \quad h(x) = \phi_{K_0}(x_1) \cdot \ldots \cdot \phi_{K_0}(x_m). \tag{5}$$

Zauważmy, że:

- możemy założyć, że istnieje co najwyżej jeden indeks i, dla którego $x_i \notin K_0$ (wynika to z podmultiplikatywności f i tego, że $\phi_{K_0} = f$ poza K_0, a więc gdyby np. $x_1, x_2 \notin K_0$, moglibyśmy zastąpić te dwie liczby w warunku (5) przez iloczyn $x_1 x_2$;
- jeżeli $x_i \in K_0$, to $x_i \leqslant k$ (gdyby tak nie było, to mielibyśmy $x_i \geqslant l$, co jest niemożliwe, bo $f(l)^{1/2} > f(x)$, skąd wynikałoby, że $h(x) > f(x)$);
- nie istnieją trzy różne indeksy $r, s, t \in \{1, \ldots, m\}$, dla których $x_r = x_s = x_t \in K_0$ (wynika to z tego, że $f(p)^{3/2} > f(p^3)$, a więc moglibyśmy w warunku (5) zastąpić x_r, x_s, x_t przez iloczyn $x_r x_s x_t$);
- dla przynajmniej jednego (a zatem – dla dokładnie jednego) indeksu i mamy $x_i \notin K_0$ (wynika to z nierówności $(k!)^4 < x$ oraz dwóch poprzednich obserwacji).

Przypuśćmy, że $m > 1$. Z powyższych uwag wiemy, że $x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_m \leqslant (k!)^2 < x^{1/2}$, a więc $x_1 > x^{1/2}$. Wtedy jednak mielibyśmy

$$\phi_{K_0}(x_1) \cdot \ldots \cdot \phi_{K_0}(x_m) \geqslant f(x^{1/2}) f(\min K)^{1/2},$$

co przekracza $f(x)$ z uwagi na postać funkcji f i warunek (1). Mamy więc $m = 1$, co dowodzi równości (4).

Mamy pokazać, że wklęsła obwiednia G funkcji H spełnia $G(x) = xf(x)^{-1}$ dla $x \in [\log N, \exp N]$, wiedząc, że $H(x) = xf(x)^{-1}$ dla $x \in [\log\log N, \exp\exp N]$. Wynika to z faktu, że styczna $y(x)$ do wykresu funkcji $xf(x)^{-1}$ w dowolnym punkcie $x_0 \in [\log N, \exp N]$ leży powyżej $xf(x)^{-1/2}$ wszędzie poza przedziałem $[\log\log N, \exp\exp N]$, co można uzasadnić bezpośrednim rachunkiem. $\square$

Wniosek 4.2.2. *Niech $x_1 < \ldots < x_N$ będzie szybko rosnącym ciągiem wektorów w przestrzeni Gowersa-Maureya długości $N \in L$ ze stałą $1+\varepsilon$, gdzie $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ i niech $M = \lfloor N^\varepsilon \rfloor$. Wówczas $\sum_{i=1}^N x_i$ jest ℓ_{1+}^M-wektorem ze stałą $1+4\varepsilon$.*

Dowód. Podzielmy zbiór $\{1, \ldots, N\}$ na M kolejnych częsci długości $m \sim N^{1-\varepsilon}$; dokładniej – niech m będzie najmniejszą liczbą naturalną niemniejszą niż N/M, tzn.

$$m = \left\lceil \frac{N}{\lfloor N^\varepsilon \rfloor} \right\rceil .$$

Połóżmy

$$y_j = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} x_i \quad \text{dla } 1 \leqslant j \leqslant M,$$

przy czym przyjmujemy, że x_i, jeśli któryś z rozważanych wyżej indeksów i przekracza N. Wówczas y_j jest szybko rosnącym ciągiem długości co najwyżej m ze stałą $1+\varepsilon$. Z lematu 4.2.1 otrzymujemy więc

$$\|y_j\| \leqslant (1+2\varepsilon)\frac{m}{f(m)} \quad \text{dla każdego } 1 \leqslant j \leqslant M.$$

Mamy także

$$\left\| \sum_{j=1}^{M} y_j \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \geqslant \frac{N}{f(N)},$$

skąd wynika, że $\sum_{i=1}^N x_i$ jest ℓ_{1+}^M-wektorem ze stałą

$$C = (1+2\varepsilon)\frac{m\lfloor N^\varepsilon \rfloor f(N)}{Nf(m)}.$$

Teza wynika teraz z oszacowania

$$(1+2\varepsilon)\frac{f(N)}{f(m)} \lesssim (1+2\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1} < 1+4\varepsilon. \qquad \square$$

Lemat 4.2.3. *Niech $k \in K$ i niech dany będzie ciąg specjalny $(x_1^* < \ldots < x_k^*) \in \Gamma_k(X_{GM})$, gdzie każdy z funkcjonałów x_i^* jest (μ_i, f)-formą, a także ciąg $x_1 < \ldots < x_k$ w przestrzeni X_{GM}, gdzie każdy z wektorów x_i jest sumą szybko rosnącego ciągu długości μ_i ze stałą $1+\varepsilon/4$, przy czym $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Jeżeli*

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^* \right) \left(E \sum_{i=1}^{k} x_i \right) \right| \leqslant 2 \text{ dla każdego przedziału } E \subset \mathbb{N}, \tag{6}$$

to

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i\right\| \leqslant (1+2\varepsilon)\frac{k}{f(k)}.$$

Dowód. Strategia dowodu składa się z dwóch głównych kroków:

Krok 1. Wykażemy, że dla każdego ciągu specjalnego $(z_1^* < \ldots < z_k^*) \in \Gamma_k(X_{\mathsf{GM}})$ oraz każdego przedziału $E \subset \mathbb{N}$ wartość $|z^*(Ex)|$ jest mała (dokładniej mówiąc, niewiększa niż $\frac{1}{4}$), gdzie $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$, a $z^* = f(k)^{-1/2}\sum_{i=1}^{k} z_i^*$.

Krok 2. Następnie, w celu oszacowania normy $\|x\|$, zastosujemy ogólny lemat 4.1.3 dla pewnej funkcji $g \in \mathcal{F}$ wyprodukowanej przez opisaną wcześniej procedurę, ale tak, aby uniknąć brania pierwiastka z $f(x)$ dla argumentu $x = k$.

1. Sprawdźmy najpierw, że $x_1 < \ldots < x_k$ jest ciągiem szybko rosnącym ze stałą $1+\varepsilon$. Istotnie, na mocy wniosku 4.2.2 każdy x_i jest $\ell_{1+}^{N_i}$-średnią ze stałą $1+\varepsilon$ o długości $N_i = \lfloor \mu_i^{\varepsilon/4} \rfloor$. Aby sprawdzić warunki (SR1) i (SR2) występujące w definicji 4.1.1, zauważmy, że:

- $\mu_1 = j_{2k} \in L$;
- wobec postaci funkcji $M_f(x) = f^{-1}(36x^2)$ oraz warunków na szybkość wzrostu indeksów $j_{2i} \in L$,zachodzi nierówność

  $$N_1 = \lfloor \mu_1^{\varepsilon/4} \rfloor > \frac{4M_f\,(k/\varepsilon')}{\varepsilon' f'_+(1)} > \frac{2(1+\varepsilon)M_f(k/\varepsilon')}{\varepsilon' f'_+(1)},$$

  co daje warunek (SR1);
- wobec warunku (2), gwarantującego odpowiednio szybki przyrost parametrów μ_i, mamy

  $$\frac{1}{20}\left(f(\mu_i)^{1/40}\right)^{1/2} > \#\mathrm{supp}(z_1^* + \ldots + z_{i-1}^*) > \#\mathrm{supp}(x_{i-1}) \quad \text{dla } 2 \leqslant i \leqslant k,$$

  co daje nam warunek (SR2).

Ustalmy dowolny ciąg specjalny $(z_1^* < \ldots < z_k^*) \in \Gamma_k(X_{GM})$ i rozważmy odpowiadający mu funkcjonał specjalny

$$z^* = \frac{1}{\sqrt{f(k)}}\sum_{i=1}^{k} z_i^*,$$

który oczywiście jest $(k, \sqrt{f})$ formą. Ustalmy też dowolnie przedział $E \subset \mathbb{N}$. Naszym celem jest teraz wykazanie nierówności

$$|z^*(Ex)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Niech t będzie najmniejszym indeksem ze zbioru $\{1, \ldots, k\}$ spełniającym $x_1^* = z_1^*, \ldots, x_t^* = z_t^*$, przy czym kładziemy $t = 0$ w przypadku, gdy takiego indeksu nie ma, czyli gdy $x_1^* \neq z_1^*$. Mamy więc

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{f(k)}}(x_1^* + \ldots + x_t^* + x_{t+1}^* + \ldots + x_k^*)$$

oraz

$$z^* = \frac{1}{\sqrt{f(k)}}(z_1^* + \ldots + z_t^* + z_{t+1}^* + \ldots + z_k^*),$$

przy czym w powyższych sumach składniki odpowiadające indeksom $i \leqslant t$ są odpowiednio równe, podczas gdy wszystkie pozostałe są formami o zupełnie różnych długościach – wynika to z faktu, że x^* i z^* są funkcjonałami specjalnymi i z własności injekcji σ.

Chcemy najpierw pokazać, że wartości $|z_i^*(Ex_j)|$ są małe (niewiększe niż k^{-2}), o ile $i \neq j$ lub $i = j > t + 1$. W obydwu tych przypadkach istnieją liczby $\ell_1, l_2 \in L$, $\ell_1 \neq l_2$, dla których:

- z_i^* jest (ℓ_1, f)-formą;
- x_j jest znormalizowaną sumą szybkorosnącego ciągu długości l_2.

Co więcej:

- z wniosku 4.2.2 wiemy, że x_j jest sam $\ell_{1+}^{l_2'}$-wektorem ze stałą $1 + \varepsilon$, gdzie $l_2' = \lfloor l_2^{\varepsilon/4} \rfloor$;
- mamy ponadto $\ell_1 \geqslant j_{2k}$, jako że z_i^* jest składnikiem ciągu specjalnego długości k.

Rozważymy dwa przypadki.

1° Gdy $\ell_1 < l_2$: Mamy wtedy także $\ell_1 < l_2'$ z uwagi na tempo wzrostu elementów zbioru L (zauważmy, że dokładnie w tym momencie potrzebujemy jakiejś restrykcji na wartość ε; dla dalszych celów w zupełności wystarcza założona przez nas wartość $\varepsilon = \frac{1}{10}$). Z lematu **??** otrzymujemy:

$$|z_i^*(Ex_j)| = |(Ez_i^*)x_j| \leqslant 3(1 + \varepsilon)f(j_{2k})^{-1} < k^{-2}.$$

2° Gdy $\ell_1 > l_2$: Wtedy także $\ell_1 > M_f(l_2)$ i możemy zastosować lemat 4.1.2 z $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ otrzymując $|z_i^*(Ex_j')| \leqslant 3$, gdzie x_j' jest nieznormalizowaną wersją x_j, tj. sumą odpowiedniego ciągu szybkorosnącego. Oczywiście $\|x_j'\| \geqslant l_2/f(l_2)$, skąd znów otrzymujemy $|z_i^*(Ex_j)| \leqslant k^{-2}$.

Korzystając z wykazanych właśnie oszacowań, dostajemy

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{k} z_i^*\right)\left(E\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right| \leqslant \left|\left(\sum_{i=1}^{t} z_i^*\right)\left(E\sum_{i=1}^{t} x_i\right)\right| + |z_{t+1}^*(x_{t+1})| + $$
$$+ \sum_{i=t+2}^{k} |z_i^*(Ex_i)| + \sum_{i\neq j} |z_i^*(Ex_j)| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\left(\sum_{i=1}^{t} z_i^*\right)\left(E\sum_{i=1}^{t} x_i\right)\right| + 1 + k^2 \cdot k^{-2} \leqslant 4,$$

bowiem pierwszy składnik jest postaci

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{t} z_i^*\right)\left(E\sum_{i=1}^{t} x_i\right)\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{t} x_i^*\right)\left(F\sum_{i=1}^{t} x_i\right)\right|,$$

dla odpowiedniego przedziału $F \subset \mathbb{N}$, co na mocy założenia nie przekracza 2. W konsekwencji

$$|z^*(Ex)| \leqslant \frac{4}{\sqrt{f(k)}} < \frac{1}{4},$$

co oznacza, że zrealizowaliśmy pierwszy krok dowodu.

2. Rozważmy funkcję $\phi_{K\setminus\{k\}}$; przypomnijmy, że zgodnie z definicją mamy

$$\phi_{K\setminus\{k\}}(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} & \text{dla } x \in K \setminus \{k\}, \\ f(x) & \text{dla pozostałych } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

To, co wykazaliśmy w pierwszym kroku oznacza, że szacując normę wektora Ex możemy zapomnieć o funkcjonałach specjalnych długości k. Dokładniej mówiąc – jeżeli $g_{K\setminus\{k\}} \in \mathcal{F}$ jest funkcją odpowiadającą funkcji $\phi_{K\setminus\{k\}}$ (poprzez opisaną wcześniej procedurę), to

$$\frac{1}{4} < \|Ex\| \leqslant \sup\Big\{|z^*(Ex)| \colon z^* \text{ jest } (M, g_{K\setminus\{k\}})\text{-formą, gdzie } M \geqslant 2\Big\}$$

dla każdego przedziału $E \subset \mathbb{N}$ spełniającego $\lambda(E) \geqslant 1$. Z lematu 4.1.3 (przypomnijmy, że x jest szybkorosnącym wektorem długości k ze stałą $1+\varepsilon$) otrzymujemy więc oszacowanie

$$\|x\| \leqslant (1+2\varepsilon)\frac{k}{g_{K\setminus\{k\}}(k)} = (1+2\varepsilon)\frac{k}{f(k)},$$

bowiem zgodnie z dowodem lematu 4.2.1 mamy $g_{K\setminus\{k\}}(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [\log k, \exp k]$, w szczególności dla $x = k$. $\square$

4.3 Dziedziczna nierozkładalność przestrzeni X_{GM}

Definicja 4.3.1. Przestrzeń Banacha X nazwiemy *dziedzicznie nierozkładalną*, jeżeli żadna jej nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń domknięta Y nie dopuszcza rozkładu $Y = W \oplus Z$ na topologiczną sumę prostą dwóch (domkniętych) nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni W i Z.

Zauważmy, że przestrzeń dziedzicznie nierozkładalna nie może zawierać bezwarunkowego ciągu bazowego, gdyby bowiem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ był takim ciągiem, to mielibyśmy rozkład $[x_n]_{n=1}^{\infty} = [x_{2n-1}]_{n=1}^{\infty} \oplus [x_{2n}]_{n=1}^{\infty}$. Przestrzeń X_{GM} jest pierwszym w historii przykładem przestrzeni dziedzicznie nierozkładalnej. Aby wykazać tę własność, posłużymy się jej charakteryzacją zawartą w poniższym twierdzeniu, którego dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 4.3.2. *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Następujące warunki są równoważne:*

1. *X jest dziedzicznie nierozkładalna.*
2. *Dla każdych dwóch nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni $Y, Z \subset X$ spełniających $Y \cap Z = \{0\}$ mamy $\mathrm{dist}(S_Y, S_Z) = 0$.*
3. *Dla każdych dwóch nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni $Y, Z \subset X$ spełniających $Y \cap Z = \{0\}$ i każdego $\delta > 0$ istnieją takie wektory $y \in Y$ i $z \in Z$, że*
$$\delta \|y + z\| > \|y - z\|.$$

Twierdzenie 4.3.3 (Gowers, Maurey, 1993)**.** *Przestrzeń Gowersa-Maureya jest dziedzicznie nierozkładalna.*

Dowód. Ustalmy dwie nieskończenie wymiarowe podprzestrzeni $Y, Z \subset X_{\mathsf{GM}}$ spełniające $Y \cap Z = \{0\}$ oraz dowolną liczbę $\delta > 0$; wobec twierdzenia 4.3.2 mamy pokazać, że istnieją wektory $y \in Y$ i $z \in Z$, dla których $\delta\|y + z\| > \|y - z\|$. Na mocy twierdzenia Bessagi-Pełczyńskiego (a dokładniej: jego wersji wypowiedzianej w treści zadania 3.2) możemy też założyć, że Y i Z są podprzestrzeniami blokowymi.

Wybierzmy odpowiednio dużą liczbę $k \in K$ (jak wyniknie z rachunków, wystarczy wziąć takie k, że $f(k)^{-1/2} < \delta/4$). Chcemy skonstruować znormalizowany ciąg wektorów $x_1 < \ldots < x_k$ w X_{GM}, przy czym $x_i \in Y$ dla i nieparzystych i $x_i \in Z$ dla i parzystych, dla którego norma sumy $\sum_{i=1}^{k} (-1)^i x_i$ będzie istotnie mniejsza od normy sumy $\sum_{i=1}^{k} x_i$ (pierwsza z nich będzie rzędu co najwyżej $kf(k)^{-1}$, druga – rzędu co najmniej $kf(k)^{-1/2}$). W naszej konstrukcji będziemy ciągle milcząco korzystać z lematu 3.2.6.

Przyjmijmy $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Niech $x_1 \in Y$ będzie dowolnym wektorem szybkorosnącym ze stałą $1 + \varepsilon/4$ o długości $M_1 = j_{2k}$ i normie równej 1. Jak wiemy z lematu 4.2.2, x_1 jest $\ell_{1+}^{N_1}$-średnią ze stałą $1 + \varepsilon$, przy czym

$$N_1 = \lfloor M_1^{\varepsilon/4} \rfloor > \frac{4M_f(k/\varepsilon')}{\varepsilon' f'_+(1)}.$$

Niech $g = g_K \in \mathcal{F}$ będzie funkcją wyprodukowaną z funkcji ϕ_K za pomocą opisanej wcześniej procedury. Chcemy teraz wybrać taki funkcjonał $x_1^* \in \mathcal{Q}$, który byłby (M_1, g)-formą i spełniał przy tym warunek

$$\left| x_1^*(x_1) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{k}. \tag{7}$$

Aby to zrobić, wystarczy zauważyć, że istnieją (M_1, g)-formy, których wartości na x_1 są bliskie $\|x_1\| = 1$ i następnie skorzystać z gęstości zbioru $\mathcal{Q}$. Zauważmy więc, że z lematu 4.1.3 mamy

$$\|x_1\| \leqslant (1+\varepsilon) \frac{M_1}{g(M_1)} \|x_{1,1}\|,$$

gdzie $x_1 = x_{1,1} + \ldots + x_{1,N_1}$ jest przedstawieniem x_1 w postaci $\ell_{1+}^{N_1}$-średniej (oczywiście normy wszystkich $x_{1,i}$ są jednakowe). Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant N_1$ niech $x_{1,i}^*$ będzie funkcjonałem normującym dla $x_{1,i}$. Określmy (M_1, g)-formę

$$\widetilde{x}_1^* = \frac{1}{g(M_1)} \sum_{i=1}^{M} x_{1,i}^*;$$

mamy wówczas $\widetilde{x}_1^*(x_1) \geqslant (1+\varepsilon)^{-1} \|x_1\|$, a zatem musi istnieć (M_1, g)-forma $x_1^* \in \mathcal{Q}$ spełniająca warunek (7). Oczywiście możemy też zażądać, aby $\mathrm{ran}(x_1^*) = \mathrm{ran}(x_1)$.

Niech teraz $M_2 = \sigma(x_1^*) \in L$. Wybierzmy wektor jednostkowy $x_2 \in Z$ będący wektorem szybkorosnącym długości M_2 ze stałą $1 + \varepsilon/4$. Znów zauważamy, że x_2 jest $\ell_{1+}^{N_2}$-średnią ze stałą $1+\varepsilon$, gdzie $N_2 = \lfloor M_2^{\varepsilon/4} \rfloor$ jest odpowiednio większe od N_1 (pomijamy precyzyjne uzasadnienie, jako że *de facto* chodzi tylko o to, aby tempo wzrostu liczb M_1 gwarantowało spełnienie warunków (SR1) i (SR2) dla uzyskanego ciągu $x_1 < \ldots < x_k$ – spotkaliśmy się już z tym argumentem wcześniej; patrz: dowód lematu 4.2.3). Rozumując jak wyżej, wybieramy (M_2, g)-formę $x_2^* \in \mathcal{Q}$ spełniająca warunki: $\mathrm{ran}(x_2^*) = \mathrm{ran}(x_2)$ oraz $|x_2^*(x_2) - 1/2| < 1/k$. Odnotujmy, że wszystkie w ten sposób otrzymane (M_i, g)-formy są w istocie (M_i, f)-formami, jako że wartości funkcji g i f zgadzają się na zbiorze L (zobacz: dowód lematu 4.2.1).

Kontynuując opisane postępowanie, otrzymujemy ciąg wektorów jednostkowych $x_1 < \ldots < x_k$ w X_{GM} oraz ciąg funkcjonałów $x_1^* < \ldots < x_k^*$ w $\mathcal{Q}$ spełniających

$$\left| x_i^*(x_i) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{k} \quad \text{dla każdego } 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{8}$$

Ponadto $(x_1^*, \ldots, x_k^*) \in \Gamma_k(X_{\mathsf{GM}})$, a zatem warunek (8) daje:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{f(k)}} \sum_{i=1}^{k} x_i^*(x_i) \geqslant \frac{k/2 - 1}{\sqrt{f(k)}}. \tag{9}$$

Jeszcze raz korzystając z (8), widzimy, że dla dowolnego przedziału $E \subset \mathbb{N}$ mamy

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^*\right)\left(E\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right| \leqslant 2,$$

a zatem z lematu 4.2.3 otrzymujemy

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}(-1)^i x_i\right\| \leqslant (1+2\varepsilon)\frac{k}{f(k)}. \tag{10}$$

Definiując teraz y jako sumę wszystkich x_i o indeksach nieparzystych, a z jako sumę wszystkich x_i o indeksach parzystych, dostajemy wektory $y \in Y$ i $z \in Z$, które – na mocy nierówności (9) i (10) i doboru liczby k – spełniają warunek $\delta\|y+z\| > \|y-z\|$. $\square$

4.4 Operatory na przestrzeniach dziedzicznie nierozkładalnych

Celem tej sekcji jest wykazanie, że zespolone (i, do pewnego stopnia, także rzeczywiste) przestrzenie dziedzicznie nierozkładalne dopuszczają niewiele ograniczonych operatorów liniowych. Zaczniemy od przypadku zespolonego, w którym kluczową rolę gra następująca definicja. (Symbolem $\mathscr{B}(X)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich ograniczonych operatorów liniowych z X do X.)

Definicja 4.4.1. Niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in \mathscr{B}(X)$. Liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$ nazwiemy *nieskończenie singularną dla* T, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń $Y_\varepsilon \subseteq X$, że

$$\left\|(T-\lambda I)|_{Y_\varepsilon}\right\| < \varepsilon.$$

Zdefiniujmy również

$$F_T = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \lambda \text{ nie jest nieskończenie singularna dla } T\}.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy

$$\lambda \in F_T \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{istnieje taka podprzestrzeń skończonego}\\ \text{kowymiaru } Y \subseteq X\text{, że } X = \ker(T-\lambda I)\oplus Y\\ \text{oraz } (T-\lambda I)|_Y \text{ jest ograniczony z dołu, tj.}\\ \text{jest izomorfizmem na swój obraz.}\end{array} \tag{11}$$

Wynika stąd natychmiast otwartość zbioru F_T. Ponadto, jeśli λ jest nieskończenie singularna dla T, to tym bardziej $\lambda \in \sigma(T)$, a więc F_T zawiera zbiór rezolwenty. Innymi słowy, zbiór wartości nieskończenie singularnych dla T jest zwartym podzbiorem widma T. Nietrywialnym faktem, który za chwilę udowodnimy, jest niepustość tego zbioru w przypadku, gdy X jest nieskończenie wymiarowa nad ciałem $\mathbb{C}$.

Fakt 4.4.2. *Jeśli X jest zespolona i nieskończenie wymiarowa, $T \in \mathscr{B}(X)$ oraz $\sigma(T) = \{0\}$, to wartość 0 jest nieskończenie singularna dla T.*

Dowód. Gdyby tak nie było, to istniałaby podprzestrzeń $Z \subseteq X$, $\mathrm{codim} Z < \infty$ taka, że $T|_Z$ jest izomorfizmem. Zdefiniujmy

$$Z_0 = Z, \ \ Z_1 = Z \cap T(Z), \ \ldots, \ Z_k = Z \cap T(Z_{k-1}).$$

Z założenia każda z tak określonych podprzestrzeni ma nieskończony wymiar. Dla dowolnego niezerowego $x \in Z_k$ mamy $x = T^k(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in Z \setminus \{0\}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\|Tz\| \geqslant \|z\|$ dla $z \in Z$, skąd $0 < \|x_0\| \leqslant \|T^k x_0\|$, a zatem $\|T^k\| \geqslant 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i wzór na promień spektralny daje $\rho(T) \geqslant 1$, co jest sprzeczne z założeniem. □

Fakt 4.4.3. *Niech X będzie przestrzenią zespoloną i $T \in \mathscr{B}(X)$. Jeżeli $\lambda \in F_T$, a $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest takim ciągiem ograniczonym, że ciąg $((T - \lambda I)(x_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to pewien podciąg ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.*

Dowód. Z komentarzy po definicji liczby nieskończenie singularnej wiemy, że $X = Y \oplus Z$, gdzie Y jest skończonego kowymiaru oraz $(T - \lambda I)|_Y$ jest ograniczony z dołu. Napiszmy $x_n = y_n + z_n$, gdzie $y_n \in Y$ oraz $z_n \in Z$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przechodząc do zbieżnego podciągu $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ i zauważając, że skoro zbieżny jest ciąg $((T - \lambda I)(y_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$, zbieżny musi też być $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, otrzymujemy tezę. □

Fakt 4.4.4. *Niech X będzie przestrzenią zespoloną i $T \in \mathscr{B}(X)$. Jeżeli $\lambda \in \partial\sigma(T) \cap F_T$, to λ jest wartością własną operatora T o skończonej krotności.*

Dowód. Liczba λ jest aproksymatywną wartością własną, tzn. istnieje taki ciąg wektorów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o normie 1, że

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0.$$

(Wynika to wprost z założenia, że λ leży na brzegu widma.) Wobec faktu 4.4.3 wiemy więc, że λ jest wartością własną T. Oczywiście musi mieć ona krotność skończoną, jako że $\lambda \in F_T$ (zobacz: uwagi po definicji 4.4.1). □

Odnotujmy jeszcze jeden fakt, którego dowód (np. z wykorzystaniem elementów teorii Fredholma) pozostawiamy jako ćwiczenie.

Fakt 4.4.5. *Niech X będzie przestrzenią zespoloną i $T \in \mathscr{B}(X)$. Każda liczba ze zbioru $\lambda \in \partial\sigma(T) \cap F_T$ jest punktem izolowanym $\sigma(T)$.*

Twierdzenie 4.4.6. *Niech X będzie nieskończenie wymiarową, zespoloną przestrzenią Banacha i niech $T \in \mathscr{B}(X)$. Wówczas $F_T \neq \mathbb{C}$, tzn. istnieje przynajmniej jedna wartość nieskończenie singularna dla T.*

Dowód. Przypuśćmy, że $F_T = \mathbb{C}$. Z faktu 4.4.5 wynika, że każda liczba $\lambda \in \partial\sigma(T)$ jest punktem izolowanym $\sigma(T)$, a więc $\sigma(T)$ jest zbiorem skończonym, powiedzmy $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Rozważmy wielomian

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \lambda_j).$$

Dla każdego $\lambda \neq 0$ mamy

$$P(z) - \lambda = \prod_{j=1}^{n} (z - \mu_j) \quad \text{dla pewnych } \mu_j \notin \sigma(T),$$

zatem $P(T) - \lambda I$ jest operatorem odwracalnym, co oznacza, że $\sigma(P(T)) = 0$ (wynika to też od razu z twierdzenia o odwzrowaniu spektralnym). Na mocy faktu 4.4.2 wartość 0 jest nieskończenie singularna dla $P(T)$. Istnieje więc ciąg wektorów jednostkowych $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniający $P(T)x_n \to 0$; możemy przy tym zażądać, aby ciąg ten był ciągiem bazowym, w szczególności – nie zawierał podciągu zbieżnego. Mamy jednak $P(T) = (T - \lambda_1 I)P_1(T)$, gdzie $P_1(z) = \prod_{j>2}(z - \lambda_j)$, stosując więc n-krotnie lemat 4.4.3, otrzymujemy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera podciąg zbieżny; sprzeczność. $\square$

Przed dowodem twierdzenia o postaci operatorów na zespolonych przestrzeniach dziedzicznie nierozkładalnych odnotujmy dwie proste obserwacje, które wynikają niemal bezpośrednio z warunku podanego w twierdzeniu 4.3.2(2). Mianowicie, jeżeli X jest przestrzenią dziedzicznie nierozkładalną, a $T \in \mathscr{B}(X)$, to:

- istnieje dokładnie jedna wartość nieskończenie singularna dla T;
- jeśli λ jest wartością nieskończenie singularną dla T, to $T - \lambda I$ jest ściśle singularny (tzn. nie jest ograniczony z dołu na żadnej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni X).

Twierdzenie 4.4.7. *Niech X będzie zespoloną przestrzenią dziedzicznie nierozkładalną. Wówczas każdy operator $T \in \mathscr{B}(X)$ jest postaci $T = S + \lambda I$, gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$, a S jest operatorem ściśle singularnym. W konsekwencji X nie jest izomorficzna z żadną swoją właściwą podprzestrzenią.*

Dowód. Z twierdzenia 4.4.6 i powyższych uwag wiemy, że istnieje dokładnie jedna wartość λ nieskończenie singularna dla T, a ponadto $T - \lambda I$ jest ściśle singularny. Ostatnią tezę

Przypuśćmy teraz, że $T\colon X \to Y$ jest izomorfizmem na pewną właściwą podprzestrzeń $Y \subset X$. Wówczas albo T nie jest operatorem Fredholma, albo jego indeks Fredholma jest niezerowy. Jednak $T = S + \lambda I$ jest ściśle singularnym zaburzeniem operatora Fredholma (oczywiście mamy $\lambda \neq 0$) o zerowym indeksie, a więc też musi mieć indeks zerowy, co daje sprzeczność. $\square$

4.5 Lemat o przesunięciu

Naszym celem jest teraz wykazanie interesującej (i dość patologicznej) własności przestrzeni Gowersa-Maureya, mianowicie – że istnieje w niej ciąg wektorów jednostkowych, który jest ciągiem przybliżonych wektorów własnych *dowolnego* operatora. W istocie, ciągów takich mamy w tej przestrzeni całkiem sporo, mówiąc dokładniej, możemy je odnaleźć w każdej podprzestrzeni blokowej. Każdemu operatorowi działającemu na przestrzeni Gowersa-Maureya możemy więc przyporządkować pewną charakterystyczną wielkość – przybliżoną wartość własną odpowiadającą ciągowi wektorów, o którym mowa powyżej. Fakt ten będzie miał kluczowe znaczenie w następnym rozdziale, gdzie będziemy mówili o kontrprzykładzie do problemu Schroedera-Bernsteina.

Symbolem X_{GM} oznaczamy tutaj przestrzeń Gowersa-Maureya nad ciałem $\mathbb{R}$. Zapowiedziane twierdzenie brzmi następująco.

Twierdzenie 4.5.1. *Niech Y będzie dowolną podprzestrzenią blokową przestrzeni X_{GM} i niech $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ będzie takim ciągiem, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wektor y_n jest ℓ_{1+}^n-średnią ze stałą $1+\varepsilon/4$, przy czym $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Wówczas dla każdego operatora $T \in \mathscr{B}(X_{GM})$ istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$, że*

$$T(y_n) - \lambda y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Co więcej, liczba ta zależy wyłącznie od T (tj. nie zależy od wyboru blokowego ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ℓ_{1+}^n-średnich). Ponadto wystarczy, aby T był określony tylko na Y.

Wykażemy najpierw lemat, który roboczo nazwiemy „lematem o przesunięciu". Sens takiej nazwy jest jasny w świetle treści tego lematu – żaden operator z $\mathscr{B}(X_{\mathsf{GM}})$ nie może „istotnie" i „nieskończenie długo" przesuwać nośników wektorów z X_{GM}. Stosując pokazane niżej rozumowanie, można np. bezpośrednio uzasadnić fakt, że dla przestrzeni Gowersa-Maureya ciągi bazowe $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ i $(e_n)_{n=2}^{\infty}$ nie są równoważne (w świetle twierdzenia 4.4.7, wiemy już znacznie więcej w przypadku zespolonym, jednak tamten dowód oparty był na teorii operatorów i przez to znacznie mniej bezpośredni). Co więcej, lemat może być też użyty do wykazania, że również rzeczywista wersja przestrzeni X_{GM} nie jest izomorficzna z żadną swoją właściwą podprzestrzenią.

Lemat 4.5.2 (Lemat o przesunięciu)**.** *Niech $Y \subset X_{GM}$ będzie podprzestrzenią blokową i niech $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ będzie takim ciągiem, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wektor y_n jest ℓ_{1+}^n-średnią ze stałą $1+\varepsilon/4$, przy czym $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Wówczas dla każdego ograniczonego operatora liniowego $T\colon Y \to X_{\mathsf{GM}}$ mamy*

$$\operatorname{dist}\big(T(y_n), \mathbb{R}y_n\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dowód. Dowód ten jest w istocie bardzo podobny do dowodu twierdzenia 4.3.3. Najpierw zauważmy, że jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem wektorów blokowych tworzącym bazę podprzestrzeni Y, to możemy założyć, że wektory $T(f_n)$, dla $n \in \mathbb{N}$, mają skończone nośniki oraz $\min \operatorname{supp} T(f_n) \to \infty$. Wynika to stąd, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do zera, natomiast skończoność nośników $T(f_n)$ możemy zagwarantować biorąc odpowiednio małą perturbację operatora T.

Dla dowolnego wektora o skończonym nosniku $y \in Y$ niech $I(y)$ oznacza najmniejszy przedział liczb naturalnych zawierający nośniki wektorów y i $T(y)$. Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wektor y_n jest ℓ_{1+}^n-średnią, przechodząc do podciągu i znów rozważając odpowiednią perturbację operatora T, możemy dalej zakładać, że $I(y_n) < I(y_{n+1})$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Jeżeli dowodzona teza nie jest prawdziwa, to jeszcze raz przechodząc do podciągu, wnosimy, że dla pewnej liczby $\delta > 0$ mamy

$$\operatorname{dist}\big(T(y_n), \mathbb{R}y_n\big) > \delta \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Na mocy twierdzenia Hahna-Banacha możemy więc dobrać takie funkcjonały y_n^* z kuli jednostkowej X_{GM}^*, że

$$y_n^*(T(y_n)) > \delta, \quad y_n^*(y_n) = 0 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ran}(y_n^*) \subseteq I(y_n) \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Aby zastosować procedurę z dowodu twierdzenia 4.3.3, dokonajmy najpierw prostej obserwacji: Dla każdego $p \in L = \{j_2, j_4, \ldots\}$ i $m \in \mathbb{N}$ istnieją jednostkowy wektor szybkorosnący $x \in Y$ długości p ze stałą $1+\varepsilon/4$, a także (p,f)-forma x^* spełniające warunki: $m < I(x)$, $\operatorname{ran}(x^*) \subseteq I(x)$, $x^*(x) = 0$ oraz $x^*(T(x)) > \delta/2$. Aby to uzasadnić, wystarczy określić

$$x = \frac{y_{n_1} + \ldots + y_{n_p}}{\|y_{n_1} + \ldots + y_{n_p}\|} \qquad \text{oraz} \qquad x^* = \frac{1}{f(p)}\big(y_{n_1}^* + \ldots + y_{n_p}^*\big),$$

gdzie $y_{n_1} < \ldots < y_{n_p}$ jest dowolnym szybkorosnącym ciągiem w Y o długości p ze stałą $1+\varepsilon/4$, dla którego $m < I(y_{n_1})$. Mamy oczywiście $x^*(\sum_{i=1}^p y_{n_i}) = 0$, a także

$$x^*\left(\sum_{i=1}^p T(y_{n_i})\right) > \frac{\delta p}{f(p)}.$$

Jednocześnie z lematu 4.2.1 mamy

$$\left\|\sum_{i=1}^p y_{n_i}\right\| \leqslant \frac{2p}{f(p)},$$

skąd otrzymujemy $x^*(T(x)) > \delta/2$.

Dla dowolnego $k \in K = \{j_1, j_3, \ldots\}$ skonstruujemy teraz indukcyjnie dwa ciągi: $(x_1 < \ldots < x_k)$ i $(x_1^* < \ldots < x_k^*) \in \Gamma_k(X_{\mathsf{GM}})$, które zaświadczą o tym, że T (przy założeniu fałszywości tezy) jest operatorem nieograniczonym, co zakończy dowód.

Wybierzmy $x_1 \in Y$ jako dowolny szybkorosnący wektor jednostkowy długości $M_1 = j_{2k} \in L$ ze stałą $1+\varepsilon/4$. Jak wiemy z lematu 4.2.2, x_1 jest $\ell_{1+}^{N_1}$-średnią, gdzie

$$N_1 = \lfloor M_1^{\varepsilon/4} \rfloor \geqslant \frac{4M_f(k/\varepsilon)}{\varepsilon f'_+(1)},$$

co weryfikuje warunek (SR1) z definicji ciągu szybkorosnącego. Wybierzmy x_1^* jako dowolną (M_1, f)-formę z $\mathcal{Q}$ spełniającą warunki

$$|x_1^*(x_1)| \leqslant \frac{1}{k^2}, \quad x_1^*(T(x_1)) > \frac{\delta}{2} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ran}(x_1^*) \subseteq I(x_1). \tag{12}$$

Niech dalej $M_2 = \sigma(x_1^*)$. Wybieramy teraz $x_2 \in Y$ jako dowolny szybkorosnący wektor jednostkowy długości M_2 ze stałą $1+\varepsilon/4$, przy czym $I(x_1) < I(x_2)$. Funkcjonał x_2^* wybieramy zaś jako (M_2, f)-formę z $\mathcal{Q}$ spełniającą warunki (12) dla x_2 i x_2^* w miejscu x_1 i x_1^*. Kontynuując to postępowanie, otrzymujemy żądane ciągi. Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego przedziału $E \subset \mathbb{N}$ mamy

$|(\sum_{i=1}^k x_i^*)(E\sum_{i=1}^k x_i)| \leqslant 2$, a zatem lemat 4.2.3 (jak poprzednio, sprawdzamy, że $x_1 < \ldots < x_k$ jest ciągiem szybkorosnącym ze stałą $1+\varepsilon$) daje:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leqslant \frac{2k}{f(k)}.$$

Z drugiej strony, ponieważ $x_1^* < \ldots < x_k^*$ jest ciągiem specjalnym, mamy oszacowanie

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} T(x_i) \right\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{f(k)}} \sum_{i=1}^{k} x_i^*(T(x_i)) > \frac{\delta k}{2\sqrt{f(k)}}$$

(skorzystaliśmy tu po drodze z tego, że $I(x_i) < I(x_{i+1})$ oraz $\mathrm{ran}(x_i^*) \subseteq I(x_i)$ dla $1 \leqslant i < k$). Oznacza to, że $\|T\| \geqslant \delta\sqrt{f(k)}/4$, co oczywiście nie może zachodzić dla każdego $k \in K$. $\square$

Dowód twierdzenia 4.5.1. Z lematu o przesunięciu wiemy, że dla każdego ciągu $(y_n)_{n=1}^\infty$, jak w tezie twierdzenia, istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ i taki podciąg $(y_n')_{n=1}^\infty$, że $T(y_n) - \lambda y_n' \to 0$. Ponieważ wiemy już, że przestrzeń X_{GM} jest dziedzicznie nierozkładalna, warunek 2 z twierdzenia 4.3.2 implikuje, że wartość λ musi być jednakowa dla każdego z owych podciągów. Stąd już dostajemy tezę; niezależność liczby λ od wyboru podprzestrzeni blokowej Y również wynika niemal natychmiast z twierdzenia 4.3.2. $\square$