

PRZYKŁADOWE ZADANIA NA KARTKÓWKĘ NR 1 (13 listopada 2018)

Zadanie 1. Niech $a \in \mathbb{C}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ będą ustalonymi parametrami. Podać interpretację geometryczną podzbioru płaszczyzny zespolonej określonego wzorem

$$H_{a,\theta} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{e^{i\theta}} \right) > 0 \right\}.$$

Odpowiedź uzasadnić. [1 punkt]

Zadanie 1'. Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ będą ustalonymi parametrami. Podać interpretację geometryczną podzbioru płaszczyzny zespolonej określonego wzorem

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \frac{z-z_1}{z-z_2} > 0 \right\}.$$

Odpowiedź uzasadnić. [1 punkt]

Zadanie 2. Rozważmy funkcję $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem

$$f(z) = -i \operatorname{Log} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

przy czym bierzemy wartość główną pierwiastka kwadratowego. Wykazać, że $\cos f(z) = z$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Rozstrzygnąć, czy f jest gałęzią funkcji arc cos na obszarze $\{|z| < 1\}$.

[1 punkt]

Zadanie 2'. Funkcja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ określona jest wzorem

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{dla } z \neq 0, \\ 0 & \text{dla } z = 0. \end{cases}$$

Rozstrzygnąć, czy f spełnia równania Cauchy'ego-Riemanna w punkcie $z_0 = 0$ i czy jest w tym punkcie różniczkowalna w sensie zespolonym. [1 punkt]

Zadanie 3. Znaleźć obraz zbioru $\{z: 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/4\}$ przez homografię $f(z) = \frac{z-i}{z-1}$.

[1 punkt]

Zadanie 3'. Wyznaczyć wszystkie pary $(w_1, w_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, dla których istnieje homografia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniająca warunki:

(i) $f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}) = \{w \in \mathbb{C} : |w - 1 - i| > 1\}$;

(ii) $f(1) = w_1, f(i) = w_2$. [1 punkt]

Zadanie 4. Wyznaczyć odwzorowanie konforemne f przeprowadzające rozciętą płaszczyznę $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty))$ na koło $\{|w| < 1\}$ i spełniające warunek $f(0) = 0$.

[2 punkty]

Zadanie 4'. Niech $\rho \in (0, 1)$. Wyznaczyć odwzorowanie konforemne f przeprowadzające rozcięte koło $\{|z| < 1\} \setminus (-1, -\rho]$ na pełne koło $\{|w| < 1\}$ i spełniające warunek $f(0) = 0$.

[2 punkty]