Przykładowe zadania na kartkówkę nr 2 (8 stycznia 2019)

Zadanie 1. Załóżmy, że $f\colon D \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną na kole jednostkowym D spełniającą warunki $f(0) = 0$ oraz $|\operatorname{Re} f(z)| < 1$ dla każdego $z \in D$. Udowodnić, że $|f'(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}$.

Szkic rozwiązania. Znajdujemy „prostą” funkcję holomorficzną g przekształcającą obszar $\{z\colon |\operatorname{Re} z| < 1\}$ na D. Można zdefiniować g jako odpowiednie złożenie homotetii, funkcji wykładniczej i homografii. Wtedy $F \coloneqq g \circ f$ będzie funkcją holomorficzną spełniającą $F(0) = 0$ oraz $F(D) \subseteq D$. Z lematu Schwarza dostajemy $|F'(0)| \leqslant 1$, co prowadzi do tezy.

Zadanie 2. Niech $p(z)$ będzie wielomianem zespolonym stopnia n spełniającym warunek $|p(z)| \leqslant M$ dla $z \in [-1, 1]$. Pokazać, że wewnątrz elipsy o półosiach a, b i ogniskach ± 1 zachodzi nierówność $|p(z)| \leqslant M(a + b)^n$.

Szkic rozwiązania. Zastosujemy funkcję Żukowskiego $\theta(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Kluczowe są dwie jej własności*:

(i) obrazem okręgu $|z| = 1$ jest odcinek $[-1, 1]$;

(ii) obrazem okręgu $|z| = r$, dla $r > 1$, jest elipsa $u^2(\frac{1}{2}(r + r^{-1}))^{-2} + v(\frac{1}{2}(r - r^{-1}))^{-2} = 1$, przy czym $\theta(z) = u + iv$.

(Zauważmy, że istotnie ± 1 są ogniskami takich elips, co wynika ze wzoru $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ na odległość ognisk od środka elipsy o półosiach $a > b$.) Wynika stąd, że dla każdego $R > 1$ obrazem pierścienia $P(0; 1, R)$ jest elipsa o półosiach $\frac{1}{2}(R \pm R^{-1})$ rozcięta odcinkiem łączącym ogniska ± 1.

Rozważmy funkcję wymierną $\varphi(z) = z^{-n} p(\theta(z))$, holomorficzną na $\mathbb{C}_*$ i posiadającą skończoną granicę przy $z \to \infty$. Funkcja $z \mapsto \varphi(z^{-1})$ ma więc osobliwość pozorną w zerze. Z własności (i) oraz założenia zadania wynika, że na okręgu $|z| = 1$ mamy $|\varphi(z)| \leqslant M$. Z zasady maksimum oraz postaci obrazu $\theta(P(0; 1, R))$ otrzymujemy więc, że na elipsie o półosiach $a = \frac{1}{2}(R + R^{-1})$, $b = \frac{1}{2}(R - R^{-1})$ mamy $|p(z)| \leqslant MR^n = M(a + b)^n$.

---

*Najprościej tych własności dowodzić zauważając, że przy oznaczeniu $w = \theta(z)$ zachodzi równość $\frac{w-1}{w+1} = (\frac{z-1}{z+1})^2$, co pozwala przedstawić funkcję Żukowskiego jako złożenie $h_2 \circ k \circ h_1$, gdzie h_1, h_2 są homografiami, a $k(u) = u^2$.