Zadanie 3′. Wyznaczyć wszystkie pary $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$, dla których istnieje homografia $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ spełniająca warunki:

(i) $f(\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}) = \{w \in \mathbb{C}\colon |w - 1 - \mathrm{i}| > 1\}$;

(ii) $f(1) = w_1$, $f(\mathrm{i}) = w_2$.

Rozwiązanie. Załóżmy, że f jest homografią spełniającą warunki zadania. Wówczas f, jako że zachowuje brzegi obszarów, przeprowadza prostą $\{z\colon \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$ na okrąg $C(1+\mathrm{i}, 1)$. Zauważmy też, że punkty $(1, \mathrm{i})$ są symetryczne względem prostej $\{z\colon \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$, a ponieważ homografie zachowują symetrię względem (uogólnionych) okręgów, warunek (ii) wymusza, że w_1 i w_2 są symetryczne względem $C(1 + \mathrm{i}, 1)$. Ze wzoru na punkt symetryczny względem okręgu mamy

$$w_2 = w_1^* = 1 + \mathrm{i} + \frac{1}{\overline{w_1} - (1 - \mathrm{i})},$$

a ponieważ punkt 1 leży w obszarze $\{z\colon \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$, musi być $f(1) = w_1 \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}(1+\mathrm{i}, 1)$. Warunkiem koniecznym na istnienie żądanej homografii f jest więc koniunkcja:

$$(*) \qquad \overline{(w_1 - (1 + \mathrm{i}))}(w_2 - (1 + \mathrm{i})) = 1 \quad \& \quad w_1 \notin \overline{D}(1 + \mathrm{i}, 1).$$

Pokażemy teraz, że dla każdej pary $(w_1, w_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ spełniającej warunek $(*)$ istnieje homografia f spełniająca (i) oraz (ii). Zauważmy w tym celu, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ prosta $\{z\colon \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$ jest symetralną odcinka o końcach $\pm(a - a\mathrm{i})$. Rozważmy homografię g_a daną wzorem

$$g_a(z) = \frac{z - a(1 - \mathrm{i})}{z + a(1 - \mathrm{i})}.$$

Zgodnie z powyższą uwagą, mamy $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \iff |g_a(z)| = 1$, co oznacza, że g_a przeprowadza prostą $\{z\colon \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$ na okrąg $C(0, 1)$. Zatem, przy dowolnym $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, homografia $f_a(z) := g_a(z) + 1 + \mathrm{i}$ przeprowadza tę prostą na okrąg $C(1 + \mathrm{i}, 1)$. Aby zagwarantować, że obrazem półpłaszczyzny $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$ będzie $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(1 + \mathrm{i}, 1)$, wystarczy znaleźć takie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, że $f_a(1) = w_1$. (Warunek $f_a(\mathrm{i}) = w_2$ będzie wówczas spełniony automatycznie na mocy warunku $(*)$ i zachowywania symetrii.) Mamy

$$\begin{aligned} f_a(1) = w_1 &\iff \frac{1 - a(1 - \mathrm{i})}{1 + a(1 - \mathrm{i})} = w_1 - 1 - \mathrm{i} \\ &\iff a(1 - \mathrm{i})(w_1 - \mathrm{i}) = -w_1 + 2 + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Taka wartość parametru a oczywiście istnieje, i jest różna od zera, bowiem wobec $(*)$ mamy $\mathrm{i} \neq w_1 \neq 2+\mathrm{i}$. Pokazaliśmy więc, że warunek $(*)$ jest też warunkiem wystarczającym na istnienie żądanej homografii f.