Zadanie 1. Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ będą ustalonymi parametrami. Podać interpretację geometryczną podzbioru płaszczyzny zespolonej określonego wzorem

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} < 0 \right\}.$$

Odpowiedź uzasadnić. [1 punkt]

Rozwiązanie. Oznaczmy zadany zbiór przez A i rozważmy homografię daną wzorem $f(z) = (z - z_1)/(z - z_2)$. Wtedy brzeg $\partial A = f^{-1}(\{w \colon \operatorname{Re} w = 0\})$, co jest przeciwobrazem przez f symetralnej odcinka o końcach -1 i 1. Mamy

$$z \in \partial A \iff |f(z) - 1| = |f(z) + 1| \iff \left| z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|,$$

skąd wynika, że ∂A jest okręgiem o środku $c \coloneqq (z_1 + z_2)/2$ i promieniu $r \coloneqq |z_1 - z_2|/2$. Homografia f, jako homeomorfizm $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, zachowuje brzegi i spójność obszarów, a zatem zbiór A jest albo otwartym kołem $D(c, r)$, albo jego dopełnieniem. Skoro $f(c) = -1 \in A$, mamy $A = D(c, r)$.

Odpowiedź: rozważanym zbiorem jest otwarte koło o średnicy $z_1 z_2$.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję $f \colon \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ daną wzorem

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} \right).$$

(a) Wykazać, że f spełnia równanie $\operatorname{tg} f(z) = z$.

(b) Dowieść, że jeżeli $|z| < 1$, to $\operatorname{Re} \dfrac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} > 0$ i wywnioskować, że f jest w kole $\{|z| < 1\}$ gałęzią funkcji arctg. [1 punkt]

Rozwiązanie. (a) Zgodnie z definicją, dla każdej liczby zespolonej w spełniającej $\cos w \neq 0$ mamy

$$\operatorname{tg} w = -\mathrm{i}\, \frac{e^{\mathrm{i}w} - e^{-\mathrm{i}w}}{e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}}.$$

Zauważmy, że dla każdego $z \in D$ mamy

$$\exp(\pm \mathrm{i} f(z)) = \exp\left\{ \pm \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} \right) \right\} = \left(\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} \right)^{\pm 1/2},$$

przy czym bierzemy gałąź główną pierwiastka. Skoro $|\pm \mathrm{i}z| < 1$, punkty $1 \pm \mathrm{i}z$ leżą w kole jednostkowym D przesuniętym o 1, mają więc argumenty główne z przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Wynika stąd, że dla rozważanej gałęzi głównej pierwiastka mamy

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z} \right)^{\pm 1/2} = \frac{(1 + \mathrm{i}z)^{\pm 1/2}}{(1 - \mathrm{i}z)^{\pm 1/2}}.$$

Zatem

$$\operatorname{tg} f(z) = -\mathrm{i}\, \frac{\frac{(1+\mathrm{i}z)^{1/2}}{(1-\mathrm{i}z)^{1/2}} - \frac{(1+\mathrm{i}z)^{-1/2}}{(1-\mathrm{i}z)^{-1/2}}}{\frac{(1+\mathrm{i}z)^{1/2}}{(1-\mathrm{i}z)^{1/2}} + \frac{(1+\mathrm{i}z)^{-1/2}}{(1-\mathrm{i}z)^{-1/2}}} = -\mathrm{i}\, \frac{\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} - 1}{\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} + 1} = z.$$

(b) Wyznaczamy homografię odwrotną do homografii $w = (1+\mathrm{i}z)/(1-\mathrm{i}z)$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \text{czyli } z = \frac{w-1}{\mathrm{i}(w+1)}.$$

Mamy $|z| = 1 \iff |w-1| = |w+1| \iff \operatorname{Re} w = 0$. Obrazem koła D jest zatem prawa lub lewa półpłaszczyzna, a skoro dla $z = 0$ mamy $w = 1$, więc jest nim półpłaszczyzna $\{w \colon \operatorname{Re} w > 0\}$.

Widzimy, że dla każdego $z \in D$ argument pod logarytmem leży w obszarze, na którym określona jest (holomorficzna) gałąź główna logarytmu. Mamy więc $f \in H(D)$ oraz $\operatorname{tg} f(z) = z$ dla $z \in D$; funkcja f jest więc holomorficzną gałęzią arctg.

Zadanie 3. Wyznaczyć obraz $f(\Omega)$ zbioru $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \geqslant 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ przez homografię

$$f(z) = \frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}.$$

[1 punkt]

Rozwiązanie. Mamy $\operatorname{Im} z = 0 \iff |\mathrm{i}-z| = |\mathrm{i}+z| \iff |f(z)| = 1$, co oznacza, że obrazem prostej $\{z \colon \operatorname{Im} z = 0\}$ jest okrąg $\{w \colon |w| = 1\}$. Ponieważ zaś $f(\mathrm{i}) = 0$, $f(-\mathrm{i}) = \infty$ oraz $f(0) = 1$, obrazem prostej $\{z \colon \operatorname{Re} z = 0\}$ jest prosta $\{w \colon \operatorname{Im} w = 0\}$.

Skoro f jest homeomorfizmem $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, mamy $\partial f(\Omega) = f(\partial \Omega)$, a zatem obrazem zbioru Ω jest albo górne, albo dolne półkole koła D wraz z odcinkiem $(-1, 1)$. Sprawdzając wartość $f(1+\mathrm{i}) = -1/(1+2\mathrm{i}) = -\frac{1}{5}(1-2\mathrm{i})$, widzimy, że będzie to górne półkole.

Odpowiedź: $f(\Omega) = D \cap \{w \colon \operatorname{Im} w \geqslant 0\}$

Zadanie 4. Przypomnijmy, że *odwzorowanie Koebego* definiowane jest wzorem

$$w = \frac{z}{(1-z)^2}$$

i, jak wiadomo, przeprowadza koło $D = \{|z| < 1\}$ na rozciętą płaszczyznę $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$.

(a) Sprawdzić, że dla dowolnego $\rho \in (0, 1)$ odcinek $(-1, -\rho]$ przechodzi przez odwzorowanie Koebego na odcinek $\big(-\frac{1}{4}, -\frac{\rho}{(1+\rho)^2}\big]$.

(b) Niech $\rho \in (0, 1)$. Wyznaczyć odwzorowanie konforemne f przeprowadzające rozcięte koło $D \setminus (-1, -\rho]$ na pełne koło D i spełniające warunek $f(0) = 0$. [2 punkty]

Rozwiązanie. (a) Odwzorowanie Koebego możemy zapisać w postaci $w = \frac{1}{4}(\frac{z+1}{z-1})^2 - \frac{1}{4}$, a więc jako złożenie homografii $f_1(z) = \frac{z+1}{z-1}$ z funkcją $f_2(v) = \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{4}$. Sprawdzamy, że $f_1(-1) = 0$, $f_1(1) = \infty$, $f_1(\infty) = 1$, a więc obrazem prostej $\{z \colon \operatorname{Im} z = 0\}$ przez f_1 jest ona sama. Odcinek $(-1, -\rho]$ jest ponadto sparametryzowany równaniem $z = -1 + t(-\rho + 1)$, $t \in (0, 1]$, gdzie mamy $f_1(z) = 1 + 2/(t(1-\rho) - 2)$, co jest funkcją malejącą zmiennej t. Oznacza to, że obrazem $(-1, -\rho]$ przez f_1 jest odcinek o końcach $f_1(-1)$ i $f_1(-\rho)$, czyli odcinek $I = [-\frac{1-\rho}{1+\rho}, 0)$. Funkcja f_2 działa na I jak zwykła rzeczywista funkcja kwadratowa, skąd łatwo sprawdzamy, że $f_2(I) = (-\frac{1}{4}, -\frac{\rho}{(1+\rho)^2}]$.

(b) Z części (a) wynika, że obrazem $D \setminus (-1, -\rho]$ przez odwzorowanie Koebego jest płaszczyzna rozcięta półprostą $(-\infty, -\frac{\rho}{(1+\rho)^2}]$. Mnożąc więc to odwzorowanie przez czynnik

$\frac{(1+\rho)^2}{4\rho}$, otrzymujemy jako obraz płaszczyznę rozciętą półprostą $(-\infty, -\frac{1}{4}]$. Oznacza to, że w przypadku odwzorowania $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ przeciwobrazem $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$ jest D, natomiast w przypadku $v = \frac{(1+\rho)^2}{4\rho} \cdot \frac{z}{(1-z)^2}$ jest nim $D \setminus (-1, -\rho]$.

Rozwiązaniem postawionego problemu jest złożenie drugiego z wymienionych odwzorowań z odwrotnym do odwzorowania Koebego. Inaczej mówiąc, jest to odwzorowanie $z \mapsto t$, gdzie t określone jest równaniem

$$\frac{(1+\rho)^2}{4\rho} \cdot \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}.$$