Zadanie ([S 11.7])**.** Wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geqslant n_0$ wszystkie zera funkcji

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n}$$

leżą w kole $K(0, \varepsilon)$.

Rozwiązanie. Dokonując zamiany zmiennych $z \mapsto z^{-1}$, widzimy, że teza zadania jest równoważna następującemu stwierdzeniu: Dla każdego $R > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \geqslant n_0$ wielomian $p_n(z) := f_n(z^{-1})$ nie ma pierwiastków w kole $\{|z| \leqslant R\}$.

Oczywiście $p_n(z) \longrightarrow \exp(z)$, przy czym zbieżność ta jest jednostajna na każdym kole $\{|z| \leqslant R\}$. Ponieważ funkcja $\exp(z)$ nigdzie nie znika, a koło $\{|z| \leqslant R\}$ jest zbiorem zwartym, mamy $\delta := \min_{|z| \leqslant R} |\exp(z)| > 0$. Z jednostajnej zbieżności wynika, że nierówność $|p_n(z) - \exp(z)| < \delta/2$ zachodzi na całym kole $\{|z| \leqslant R\}$, o ile n jest dostatecznie duże. Dla takich n mamy więc $|p_n(z)| > \delta/2 > 0$, co daje tezę.

Uwaga. Rozumowanie przedstawione powyżej to w istocie powtórzenie dowodu twierdzenia Hurwitza, jednak uproszczone o tyle, że nie było potrzeby powoływania się na twierdzenie Rouchégo. Wynikało to stąd, że funkcja $\exp(z)$, do której "porównywaliśmy" rozważany wielomian $p_n(z)$, nie ma w ogóle miejsc zerowych, a w tym przypadku zamiast twierdzenia Rouchégo wystarczy odpowiednio zastosować nierówność trójkąta.

Zadanie ([S 12.1])**.** Opisać grupę: (a) $\mathrm{Aut}(H^+)$; (b) $\mathrm{Aut}(H^+ \setminus \{\mathrm{i}\})$; (c) $\mathrm{Aut}(H^+ \setminus \{\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\})$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy znany fakt na temat grupy automorfizmów koła jednostkowego:

$$\mathrm{Aut}(D) = \left\{ e^{\mathrm{i}\theta} B_\alpha(z) \colon \theta \in \mathbb{R},\ |\alpha| < 1 \right\}, \quad \text{gdzie} \quad B_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z},$$

a także następującą prostą obserwację: Jeżeli $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ są obszarami, a $f \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ odwzorowaniem konforemnym, to $\mathrm{Aut}(\Omega_1) = \{f^{-1} \circ g \circ f \colon g \in \mathrm{Aut}(\Omega_2)\}$. Z powyższego opisu grupy $\mathrm{Aut}(D)$ można przez nietrudne rachunki wyprowadzić następującą przydatną obserwację: Homografia znormalizowana $(az + b)/(cz + d)$ (tj. taka, że $ad - bc = 1$) przeprowadza koło D w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \overline{d}$ i $b = \overline{c}$.

(a) Zauważmy, że homografia

$$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

przekształca półpłaszczyznę H^+ na koło D. Mamy też

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad f^{-1} \sim \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{skąd} \quad f^{-1}(w) = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{w + 1}{w - 1}.$$

Zgodnie z powyższą obserwacją mamy $\mathrm{Aut}(H^+) = \{f^{-1} \circ g \circ f \colon g \in \mathrm{Aut}(D)\}$. Wiemy też, że dowolną homografię $g \in \mathrm{Aut}(D)$ możemy zapisać w postaci znormalizowanej $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ g \circ f &\sim \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mathrm{i}(a + \overline{a}) - \mathrm{i}(b + \overline{b}) & -(a - \overline{a}) + (b - \overline{b}) \\ (a - \overline{a}) + (b - \overline{b}) & -\mathrm{i}(a + \overline{a}) + \mathrm{i}(b + \overline{b}) \end{pmatrix} \\ &\sim [\text{mnożymy przez i}/2] \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, a + \mathrm{Re}\, b & \mathrm{Im}\, a - \mathrm{Im}\, b \\ -\mathrm{Im}\, a - \mathrm{Im}\, b & \mathrm{Re}\, a - \mathrm{Re}\, b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Widzimy więc, że dowolny automorfizm H^+ jest dany przez macierz o współczynnikach rzeczywistych, której wyznacznik jest dodatni (równy 1) – zauważmy bowiem, że wyznacznik ostatniej macierzy to $|a|^2 - |b|^2 = 1$ (pamiętamy, że macierz odpowiadająca homografii g była znormalizowana).

Na odwrót, nietrudno zauważyć, że każda homografia postaci $h(z) = (az+b)/(cz+d)$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ spełniają $ad - bc > 0$, określa automorfizm H^+. Istotnie, przekształca ona bowiem prostą rzeczywistą w siebie, a ponadto $\operatorname{Im} h(\mathrm{i}) = (ad - bc)/(c^2 + d^2) > 0$. Mamy więc surjektywny homomorfizm grup $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^+)$, którego jądro to grupa dwuelementowa $\{\pm I\}$. Ostatecznie

$$\mathrm{Aut}(H^+) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2.$$

(b) Użyjemy tej samej homografii f, co poprzednio. Ponieważ $f(\mathrm{i}) = 0$, $\mathrm{Aut}(H^+ \setminus \{\mathrm{i}\}) = \{f^{-1} \circ g \circ f \colon g \in \mathrm{Aut}(D \setminus \{0\})\}$, a zatem zadanie sprowadza się do wyznaczenia automorfizmów nakłutego koła $D \setminus \{0\}$. Niech $g \in \mathrm{Aut}(D \setminus \{0\})$. Ponieważ $|g(z)| < 1$, funkcja g jest ograniczona i z twierdzenia Riemanna wynika, że ma ona w zerze osobliwość pozorną. Niech $G \in H(D)$ będzie holomorficznym przedłużeniem g. Pokażemy, że $G(0) = 0$.[1]

Przypuśćmy, że $w_0 := G(0) \neq 0$. Oczywiście z ciągłości G mamy $|w_0| \leqslant 1$; nie może jednak zachodzić $|w_0| = 1$, bo wtedy obraz funkcji G nie byłby zbiorem otwartym. Gdyby jednak $0 < |w_0| < 1$, to istniałby taki punkt $z_0 \in D \setminus \{0\}$, że $g(z_0) = w_0$. Weźmy otwarte i rozłączne otoczenia $U, V \subset D$ punktów 0 i z_0. Ponieważ $G|_{D\setminus\{0\}} = g$ jest bijekcją, mamy $G(U) \cap G(V) = \{w_0\}$, co znów daje sprzeczność z twierdzeniem o odwzorowaniu otwartym, jako że zbiór $G(U) \cap G(V)$ musi być zbiorem otwartym.

Pokazaliśmy, że $\mathrm{Aut}(D \setminus \{0\})$ to grupa obrotów $\{e^{\mathrm{i}\theta} z \colon \theta \in \mathbb{R}\}$ (automorfizmy koła D przeprowadzające 0 na 0), którą oczywiście utożsamiamy z okręgiem jednostkowym $\mathbb{T}$ wyposażonym w działanie mnożenia. Ponieważ, jak widzieliśmy, obszary H^+ i $D \setminus \{0\}$ są konforemne, ich grupy automorfizmów są izomorficzne – w tym przypadku izomorfizmem jest $\mathbb{T} \ni \lambda \mapsto f^{-1} \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f$. Ostatecznie

$$\mathrm{Aut}(H^+ \setminus \{\mathrm{i}\}) \cong \mathbb{T}.$$

(c) Mamy $f(\mathrm{i}) = 0$, $f(2\mathrm{i}) = \frac{1}{3}$, skąd $\mathrm{Aut}(H^+ \setminus \{\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}) = \{f^{-1} \circ g \circ f \colon g \in \mathrm{Aut}(D \setminus \{0, \frac{1}{3}\})\}$. Niech g będzie dowolnym automorfizmem $D \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$. Korzystając znów z twierdzenia Riemanna, wnosimy, że istnieje holomorficzne przedłużenie $G \in H(D)$ funkcji g. Musi być $G(D) \subseteq D$, inaczej mielibyśmy sprzeczność z twierdzeniem o odwzorowaniu otwartym. Rozumując jak poprzednio, dostajemy $G(0), G(\frac{1}{3}) \in \{0, \frac{1}{3}\}$, przy czym $G(0) \neq G(\frac{1}{3})$. Jeżeli $G(0) = 0$ i $G(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, to G jest identycznością, co wynika z ogólnej postaci automorfizmów koła D. Jeżeli natomiast $G(0) = \frac{1}{3}$ i $G(\frac{1}{3}) = 0$, to zapisując G w postaci ogólnej $\lambda B_\alpha(z)$ (gdzie $|\lambda| = 1$ i $|\alpha| < 1$), wyliczamy, że $\alpha = \frac{1}{3}$ i $\lambda = 1$. Wynika stąd, że grupa automorfizmów koła nakłutego w dwóch punktach jest grupą dwuelementową: $\mathrm{Aut}(D \setminus \{0, \frac{1}{3}\}) = \{I, B_{1/3}\}$ (zwróćmy uwagę, że każdy czynnik Blaschkego B_α jest inwolucją, tzn. $B_\alpha \circ B_\alpha = I$). Otrzymujemy zatem

$$\mathrm{Aut}(H^+ \setminus \{\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}) \cong \mathbb{Z}_2,$$

przy czym jedynym nieidentycznościowym automorfizmem $H^+ \setminus \{\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}$ jest odwzorowanie $(f^{-1} \circ B_{1/3} \circ f)(z) = -2/z$.

[1] Można wykazać następujący, ogólniejszy lemat: Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest obszarem, $z_0 \in \Omega$, a funkcja $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ jest różnowartościowa, to punkt z_0 jest albo biegunem rzędu 1, albo osobliwością pozorną, przy czym holomorficzne przedłużenie f na zbiór Ω jest także różnowartościowe.

Zadanie ([S 12.2]). Funkcja f jest holomorficzna na półkolu $P = \{|z-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\}$, ciągła na $P \cup \gamma$, gdzie $\gamma = \{|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\}$, a także $f(z) \in \mathbb{R}$ dla $z \in \gamma$. Znaleźć funkcję holomorficzną określoną na górnej półpłaszczyźnie i rozszerzającą f.

Rozwiązanie. Dążymy do tego, by skorzystać z zasady symetrii Schwarza, a więc chcemy przeprowadzić obszar P na pewien obszar Ω zawarty w górnej (lub dolnej) półpłaszczyźnie, którego brzeg jest odcinkiem na prostej rzeczywistej odpowiadającym łukowi γ. W tym celu rozważmy homografię

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} + \frac{1}{2} = \frac{z}{z + \mathrm{i}}.$$

Z pierwszego wzoru widać od razu, że $\varphi(\{\operatorname{Im} z = 0\}) = C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Rozważając trójkę punktów $(0, -\mathrm{i}, \infty)$ przechodzącą na $(0, \infty, 1)$, widzimy, że $\varphi(\{\operatorname{Re} z = 0\}) = \{\operatorname{Im} w = 0\}$. Wynika stąd, że przeciwobrazem półkola P jest jedna z ćwiartek układu współrzędnych. Obliczając homografię odwrotną do φ i biorąc np. punkt $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i} \in P$, dostajemy $\varphi^{-1}(w) = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$, co pokazuje, że $\varphi^{-1}(P) = \Omega := \{\operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Ponieważ zaś przeciwobrazem okręgu $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jest prosta rzeczywista, przeciwobrazem łuku γ jest półprosta $\kappa := \{\operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$.

Określmy funkcję $F = f \circ \varphi$. Ma ona następujące własności:

- F jest holomorficzna na Ω,
- F jest ciągła na $\Omega \cup \kappa$,
- $F(\kappa) \subset \mathbb{R}$.

Na mocy zasady symetrii Schwarza funkcja F ma holomorficzne rozszerzenie $\widetilde{F}$ na całą półpłaszczyznę $R_- := \{\operatorname{Re} z < 0\}$, które jest określone wzorem

$$\widetilde{F}(z) = \begin{cases} F(z) & \text{dla } z \in \Omega \cup \kappa \ \ (\text{czyli } \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0) \\ \overline{F(\overline{z})} & \text{dla } z \in R_- \setminus (\Omega \cup \kappa) \ \ (\text{czyli } \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z < 0). \end{cases}$$

Sprawdzamy, że $\varphi(-1 - \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$, co w połączeniu z wcześniejszymi obserwacjami daje nam, że $\varphi(R_-) = H_+$. Określmy więc $\widetilde{f} = \widetilde{F} \circ \varphi^{-1}$, co jest funkcją holomorficzną na górnej półpłaszczyźnie H_+. Sprawdzamy, że

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{z}{z - 1},$$

skąd wynika, że dla każdego $z \in H_+ \setminus (P \cup \gamma)$ mamy

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{F}(\varphi^{-1}(z)) = \widetilde{F}\Big(\frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{z}{z - 1}\Big) = \overline{f \circ \varphi\Big(\mathrm{i} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z} - 1}\Big)} = \overline{f\Big(\frac{\overline{z}}{2\overline{z} - 1}\Big)}.$$

Ostatecznie holomorficznym przedłużeniem funkcji f na półpłaszczyznę H_+ jest funkcja określona wzorem

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{dla } z \in P \cup \gamma \\ \overline{f\Big(\dfrac{\overline{z}}{2\overline{z} - 1}\Big)} & \text{dla } z \in H_+ \setminus (P \cup \gamma). \end{cases}$$