Zadanie ([S 4.10])**.** Niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze $D \subseteq \mathbb{C}$ i niech $\gamma\colon I \to D$ będzie drogą zamkniętą. Wykazać, że

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Rozwiązanie. Przypomnijmy na początek, jak rozpisuje się całka krzywoliniowa z funkcji zespolonej na swoją część rzeczywistą i urojoną. Jeżeli mianowicie $F = U + \mathrm{i}V$ oraz $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \mathrm{i}\gamma_2(t)$ dla $t \in [\alpha, \beta]$ (gdzie U, V, γ_1, γ_2 są funcjami rzeczywistymi), to

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} F(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[U(\gamma(t))\gamma_1'(t) - V(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big]\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \mathrm{i}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[V(\gamma(t))\gamma_1'(t) + U(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Niech $f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ dla $(x, y) \in D$, gdzie u i v są funkcjami rzeczywistymi. Wtedy $\overline{f} = u - \mathrm{i}v$ oraz $f' = u_x + \mathrm{i}v_x$, a zatem

$$\overline{f} f' = (uu_x + vv_x) + \mathrm{i}(uv_x - u_x v).$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla dowolnej drogi zamkniętej $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon [\alpha, \beta] \to D$ mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int\limits_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[(uu_x + vv_x)(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) - (uv_x - u_x v)(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\Big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{\gamma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

gdzie ostatnia całka jest całką z 1-formy $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, przy czym $P = uu_x + vv_x$ oraz $Q = -(uv_x - u_x v)$. Z równań Cauchy'ego-Riemanna mamy $Q = uu_y + vv_y$. Widzimy więc, że $P = \varphi_x$ oraz $Q = \varphi_y$ dla funkcji $\varphi = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$. Oznacza to, że $\omega = \mathrm{d}\varphi$, czyli 1-forma ω jest formą dokładną (ma pierwotną). Znika zatem całka z ω po dowolnej drodze zamkniętej $\gamma \subset D$ (zob. np. [W. Kołodziej, „*Analiza matematyczna*", PWN Warszawa 2010; §53]), co kończy dowód.