Zadanie ([S 5'.1])**.** Obliczyć

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma z^2 \log\frac{z+1}{z-1}\,\mathrm{d}z$$

dla gałęzi logarytmu określonej warunkiem $\log(a) = \ln a$ dla $a > 0$, gdzie kontur γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem: (a) $\gamma = C(0,2)$; (b) $\gamma = C(1,1)$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy wzór na całkowanie przez części w postaci zespolonej: Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest obszarem, $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ drogą kawałkami klasy C^1, a funkcje $f, g \in H(\Omega)$, to

$$(*) \qquad \int_\gamma f(z)g'(z)\,\mathrm{d}z = (fg)(\gamma(\beta)) - (fg)(\gamma(\alpha)) - \int_\gamma f'(z)g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Wzór ten wynika prosto z reguły różniczkowania iloczynu oraz wzoru Newtona-Leibniza. Aby go zastosować, rozstrzygnijmy najpierw, w jakich obszarach homografia $g(z) = \frac{z+1}{z-1}$ ma holomorficzną gałąź logarytmu, czy też – czy wartość główna $\operatorname{Log} g(z)$ daje funkcję holomorficzną na jakimś zbiorze otwartym zawierającym dany kontur γ.

Rozważmy dowolny obszar $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Jeżeli $\gamma \subset U$ jest k.g. konturem, to

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z = \operatorname{ind}(\gamma,-1) - \operatorname{ind}(\gamma,1).$$

Wiemy, że istnienie holomorficznej gałęzi $\log g(z)$ na U równoważne jest istnieniu tam funkcji pierwotnej dla g'/g, co z kolei jest równoważne znikaniu powyższej całki przy dowolnym wyborze konturu γ. Tak się dzieje np. dla obszaru $U = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, bowiem wówczas $\operatorname{ind}(\gamma,-1) = \operatorname{ind}(\gamma,1)$.

Homografia g przeprowadza odcinek $[-1,1]$ na półprostą $[\infty,-1]$, a zatem jedną z holomorficznych gałęzi $\log g(z)$ na $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ jest gałąź główna $\operatorname{Log} g(z)$, i to ona występuje jako czynnik w funkcji podcałkowej (na mocy danego warunku: $\log(a) = \ln a$ dla $a > 0$ i faktu, że każde dwie holomorficzne gałęzie logarytmu na zbiorze spójnym różnią się o stały składnik $2k\pi\mathrm{i}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$).

ad (a). Możemy zastosować wzór $(*)$ dla $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, $f(z) = \operatorname{Log} g(z)$ i $g(z) = z^3/3$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C(0,2)} z^2 \operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1}\,\mathrm{d}z &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C(0,2)} \left(\frac{z^3}{z+1} - \frac{z^3}{z-1}\right)\mathrm{d}z \\
&\quad [\text{dzielimy wielomian } z^3 \text{ z resztą przez } z \pm 1] \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C(0,2)} \left(z^2 - z + 1 + \frac{-1}{z+1} - (z^2+z+1) - \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z \\
&\quad [\text{pomijamy część holomorficzną, z której całka znika}] \\
&= \frac{1}{3}\Big(\operatorname{ind}(C(0,2),-1) + \operatorname{ind}(C(0,2),1)\Big) = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

ad (b). Z powyższych rozważań wynika, że $g(z)$ nie ma holomorficznej gałęzi logarytmu na żadnym otoczeniu konturu $\gamma = C(1,1)$ z tego powodu, że przecina on odcinek $[-1,1]$

w punkcie 0. Poprawność określenia zadanej całki wynika jednak z faktu, że funkcja podcałkowa jest ciągła, jeśli zdefiniujemy jej wartość w zerze jako 0. Istotnie, dla pewnego $r > 0$ funkcja $\operatorname{Log} g(z)$ jest ograniczona na zbiorze $D(0,r) \cap (\mathbb{C} \setminus [-1,1])$, skąd $\lim_{z\to 0,\, z\notin[-1,1]} z^2 \operatorname{Log} g(z) = 0$.

Będziemy stosowali wzór $(*)$ całkując po „prawie" całym okręgu $C(1,1)$, tj. z wyłączeniem pewnego łuku zawierającego punkt 0. Dla $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ niech $p_\varepsilon = 1 + e^{-\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}$, $q_\varepsilon = 1+e^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}$ i niech γ_ε będzie dodatnio zorientowanym łukiem okręgu $C(1,1)$ o początku p_ε i końcu q_ε. Wykonując podobne rachunki, jak poprzednio, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} z^2 \operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Big(q_\varepsilon^3 \operatorname{Log} g(q_\varepsilon) - p_\varepsilon^3 \operatorname{Log} g(p_\varepsilon)\Big)\\ &\quad - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\Big(\frac{z^3}{z+1} - \frac{z^3}{z+1}\Big)\,\mathrm{d}z\\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \frac{1}{3}\Big(\operatorname{ind}(C(1,1),-1) + \operatorname{ind}(C(1,1),1)\Big) = \frac{1}{3}\,,\end{aligned}$$

skąd

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C(1,1)} z^2 \operatorname{Log}\frac{z+1}{z-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\,.$$

Uwaga. Korzystając z twierdzenia o residuach, możemy dość łatwo obliczyć ogólniejszą całkę niż np. ta z przykładu (a). Mianowicie, dla dowolnych $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ oraz punktów $a, b \in D(0,r)$ zachodzi wzór

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C(0,r)} z^n \operatorname{Log}\frac{z-a}{z-b}\,\mathrm{d}z = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\,.$$

Zastosowanie twierdzenia o residuach sprowadza w tym przypadku zadanie do obliczenia residuum funkcji podcałkowej w punkcie ∞ (zobacz: [J. Krzyż, „*Zbiór zadań z funkcji analitycznych*", PWN Warszawa 2005; zadanie 3.5.6]).