Funkcje analityczne

Część 0: Własności i algebraiczne zastosowania liczb zespolonych

Zadanie 1. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ spełniają $|a| = |b| = |c| = r > 0$. Pokazać, że

$$\left|\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}\right| = r.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć

$$\sup\{\Re(\mathrm{i}z^3 + 1) \colon |z| < 2\}.$$

Zadanie 3. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Zadanie 4. Niech $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć wzór zwarty na sumy:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k+1)x\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k+1)x.$$

Zadanie 5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć sumy:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{2k}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{2k+1}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k+1}$,

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k+3}$.

Zadanie 6. Dla $n \in \mathbb{N}$ obliczyć sumę

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1}.$$

Zadanie 7. Dla $n \in \mathbb{N}$ wyprowadzić wzór zwarty na sumę

$$\sum_{k \equiv 0 \pmod 3} \binom{n}{k}.$$

Zadanie 8. Wykazać, że liczba

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

nie jest podzielna przez 5 dla żadnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 9. Wyznaczyć największą możliwą wartość $n \in \mathbb{N}$, dla której istnieją parami różne $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ spełniające warunek

$$\min_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} |z_i - z_j| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|.$$

Zadanie 10. Niech $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ będzie n-kątem foremnym wpisanym w okrąg o promieniu 1. Obliczyć

$$|A_0A_1| \cdot |A_0A_2| \cdot \ldots \cdot |A_0A_{n-1}|.$$

Zadanie 11. Udowodnić, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje k punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe, i których odległości od wszystkich pozostałych punktów są liczbami całkowitymi.

Wskazówka. Rozważyć $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$. Skorzystać z tego, że $\operatorname{Arg} z$ jest niewspółmierny z π.

Zadanie 12. Niech $a_1, b_1, c_1 > 0$ spełniają warunek $a_1 + b_1 + c_1 = 1$. Definiujemy ciągi rzeczywiste (a_n), (b_n) i (c_n) rekurencyjnie wzorami:

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_nc_n, \quad b_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n, \quad c_{n+1} = c_n^2 + 2a_nb_n.$$

Dowieść, że ciągi te są zbieżne do tej samej granicy i obliczyć jej wartość.

Wskazówka. Rozważyć ciągi liczb zespolonych określonych wzorami: $u_n = a_n + b_n + c_n$, $v_n = a_n + \omega b_n + \omega^2 c_n$, $w_n = a_n + \omega^2 b_n + \omega c_n$, gdzie $\omega = e^{2\pi \mathrm{i}/3}$ jest pierwiastkiem stopnia trzeciego z jedności.

Zadanie 13. Dane są ciągi arytmetyczne $(a_i + kr_i)_{k=0}^{\infty}$ dla $i = 1, \ldots, m$, przy czym $m \geqslant 2$, o tej własności, że każda liczba naturalna jest elementem dokładnie jednego z tych ciągów. Pokazać, że $r_i = r_j$ dla pewnych $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$.

Wskazówka. Wykorzystać tożsamość $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{a+kr} = \frac{z^a}{1-z^r}$ dla $|z| < 1$.

W rozwiązaniu poniższego zadania należy skorzystać z następującego *twierdzenia Czebyszewa*: Jeżeli $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ jest wielomianem rzeczywistym stopnia n o najstarszym współczynniku równym 1, to $\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |p(x)| \geqslant 2^{-(n-1)}$. Wiadomo też (co nie jest istotne dla rozwiązania zadania), że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x) = 2^{-(n-1)} T_n(x)$, gdzie $T_n(x)$ jest n-tym *wielomianem Czebyszewa* określonym przez równość $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$; zobacz np. [M. Aigner, G.M. Ziegler, "*Dowody z księgi*", PWN 2002].

Zadanie 14. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą dowolnymi punktami płaszczyzny. Udowodnić, że na każdym odcinku długości l leży przynajmniej jeden punkt M spełniający warunek

$$|MA_1| \cdot |MA_2| \cdot \ldots \cdot |MA_n| \geqslant 2\left(\frac{l}{4}\right)^n.$$