Funkcje analityczne

Część 1: Geometria płaszczyzny zespolonej

Zadanie 1. **(a)** Dane są parametry $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ takie, że $A \neq 0$ oraz $|B|^2 > AC$. Opisać geometrycznie zbiór $\{z \in \mathbb{C}\colon A|z|^2 - \overline{B}z - B\overline{z} + C = 0\}$.

(b) Zapisać w postaci zespolonej równania elipsy, hiperboli i paraboli.

Zadanie 2. Niech $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Pokazać, że wszystkie okręgi przechodzące przez punkty a i $\overline{a}^{-1}$ przecinają okrąg $|z| = 1$ pod kątem prostym.

Zadanie 3. Niech γ będzie krzywą opisaną równaniem biegunowym $\gamma(\theta) = r(\theta)e^{\mathrm{i}\theta}$ dla θ z pewnego przedziału $I \subseteq (-\pi, \pi]$. Załóżmy, że $r(\theta) > 0$ dla każdego $\theta \in I$ oraz że r jest funkcją różniczkowalną. Wyprowadzić wzór na kąt między krzywą γ w dowolnym jej punkcie a odpowiadającym mu promieniem wodzącym, tzn. dla każdego $\theta \in I$ podać wzór na kąt między wektorem stycznym do γ w punkcie $\gamma(\theta)$ a wektorem $[0, \gamma(\theta)]$.

Zadanie 4. Oznaczmy przez $B(z, r)$ otwarte koło na płaszczyźnie zespolonej o środku w punkcie z i promieniu r. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg zbieżny $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ o tej własności, że koła $B(z_n, \frac{1}{n})$ (dla $n \in \mathbb{N}$) są parami rozłączne.

Zadanie 5. Załóżmy, że liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$, traktowane jako punkty na płaszczyźnie zespolonej, leżą wszystkie po tej samej stronie pewnej prostej przechodzącej przez początek układu. Wykazać, że

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

Zadanie 6. **(a)** Załóżmy, że liczby $\zeta, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ spełniają warunek

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta - z_k} = 0.$$

Dowieść, że ζ należy do otoczki wypukłej zbioru $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

(b) Wykorzystać powyższą tezę w celu wykazania *twierdzenia Gaussa-Lucasa*: Jeżeli $P(z)$ jest wielomianem zespolonym, to wszystkie pierwiastki jego pochodnej $P'(z)$ leżą w otoczce wypukłej zbioru pierwiastków $P(z)$.

W rozwiązaniu poniższego zadania należy skorzystać z następującej wersji *nierówności izoperymetrycznej*: Dla dowolnego płaskiego wielokąta wypukłego Q mamy $\pi \mathrm{d}(Q) \geqslant \mathrm{p}(Q)$, gdzie $\mathrm{d}(Q)$ oznacza średnicę wielokąta Q, a $\mathrm{p}(Q)$ jego obwód. Dowód tej oraz podobnych nierówności, wraz ze szczegółowym opisem historii problemów izoperymetrycznych, można znaleźć w artykule [M.J. Mossinghoff, "*A $1 Problem*", Amer. Math. Monthly 113 (2006), 385–402].

Zadanie 7. Wykazać, że dla dowolnego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{C}$ istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$, że

$$\left| \sum_{z \in B} z \right| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{z \in A} |z|.$$

Poniższe zadania z geometrii płaskiej należy rozwiązać stosując interpretację geometryczną liczb zespolonych. Przydatne mogą okazać się następujące fakty (symbole a, b, c, d oznaczają tutaj liczby zespolone interpretowane jako punkty płaszczyzny):

(i) $\sphericalangle acb = \operatorname{Arg}\dfrac{b-c}{a-c}$, gdzie $\sphericalangle acb$ to miara kąta o wierzchołku c, skierowanego od a do b, natomiast za argument główny przyjmujemy w tym miejscu kąt z przedziału $[0, 2\pi)$;

(ii) $\varphi = \sphericalangle acb \iff \dfrac{c-b}{|c-b|} = e^{i\varphi}\dfrac{c-a}{|c-a|}$;

(iii) $ab \perp cd \iff \dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -\dfrac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$;

(iv) punkty a, b, c są kolinearne $\iff \dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \dfrac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}$;

(v) punkty a, b, c, d leżą na jednym okręgu $\iff \dfrac{a-c}{b-c} : \dfrac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8 (Twierdzenie Napoleona)**.** Na bokach trójkąta ABC zbudowano trójkąty równoboczne AA_1B, BB_1C i CC_1A. Niech P, Q, R będą odpowiednio ich środkami ciężkości. Wykazać, że trójkąt PQR jest równoboczny.

Zadanie 9 (Nierówność Ptolemeusza)**.** Dowieść, że dla dowolnego czworokąta wypukłego $ABCD$ zachodzi nierówność

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

Pokazać następnie, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

Zadanie 10. Niech H będzie ortocentrum (punktem przecięcia wysokości) trójkąta ABC. Styczne do okręgu o średnicy BC, wyprowadzone z punktu A, przecinają ten okrąg w punktach P i Q. Wykazać, że punkty P, Q, H są współliniowe.

Zadanie 11. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 2\pi, \qquad \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Dowieść, że $\dfrac{AB}{BF} \cdot \dfrac{FD}{DE} \cdot \dfrac{EC}{CA} = 1$.

Zadanie 12. Niech $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ będzie n-kątem foremnym wpisanym w okrąg o promieniu r. Udowodnić, że dla dowolnego punktu P na okręgu oraz każdej liczby naturalnej $m < n$ zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n-1} |PA_k|^{2m} = \binom{2m}{m} n r^{2m}.$$