Funkcje analityczne

Część 2: Rzut stereograficzny. Homografie i konforemność

Niech S^2 oznacza dwuwymiarową sferę w układzie współrzędnych $Ox_1x_2x_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ opisaną równaniem $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. Płaszczyznę Ox_1x_2 o równaniu $x_3=0$ utożsamiamy z płaszczyzną zespoloną $\mathbb{C}$, przy czym współrzędna x_1 odpowiada części rzeczywistej, a x_2 części urojonej. Oznaczmy przez $\mathbf{n}=(0,0,1)$ biegun północny sfery S^2. Definiujemy *rzut stereograficzny* $\pi\colon S^2\setminus\{\mathbf{n}\}\to\mathbb{C}$ w następujący sposób: dla punktu $\mathbf{p}\in S^2$ prowadzimy półprostą wychodzącą z $\mathbf{n}$ i przechodzącą przez $\mathbf{p}$, która przecina płaszczyznę $\mathbb{C}$ w pewnym punkcie $\mathbf{p}'$; definiujemy wówczas $\pi(\mathbf{p})=\mathbf{p}'$. Liczbę zespoloną z odpowiadającą punktowi $\mathbf{p}'$ nazywamy *rzutem stereograficznym* punktu $\mathbf{p}$, natomiast punkt $\mathbf{p}$ nazywamy *obrazem sferycznym* liczby z. Przypomnijmy wzory na rzut i obraz stereograficzny:

- $\pi(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}$;
- $\pi^{-1}(z)=\left(\dfrac{z+\overline{z}}{1+|z|^2},\dfrac{z-\overline{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)},\dfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right)$.

Rzut stereograficzny można rozszerzyć do odwzorowania (homeomorfizmu) $\pi\colon S^2\to\overline{\mathbb{C}}$, gdzie $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ jest jednopunktowym uzwarceniem płaszczyzny zespolonej. Biegun N z definicji przechodzi wówczas na punkt ∞. Sfera S^2 jest więc geometrycznym modelem uzwarcenia $\overline{\mathbb{C}}$, gdzie punkt w nieskończoności ma konkretną reprezentację i nie jest wyróżniony.

Dla $z_1,z_2\in\overline{\mathbb{C}}$ określamy *odległość sferyczną* $\sigma(z_1,z_2)$ jako odległość euklidesową między obrazami sferycznymi $\pi^{-1}(z_1)$ i $\pi^{-1}(z_2)$. Łatwo wyprowadzić wzór

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}.$$

Zadanie 1. Niech Γ będzie okręgiem leżącym na sferze S^2. Wykazać, że jeżeli $\mathbf{n}\in\Gamma$, to obrazem $\pi(\Gamma)$ jest prosta, jeżeli zaś $\mathbf{n}\notin\Gamma$, to $\pi(\Gamma)$ jest okręgiem.

Zadanie 2. Niech $A,C\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{C}$ spełniają $A\neq 0$ oraz $|B|^2>AC$. Znaleźć warunek wyrażony w języku parametrów A,B,C, który jest konieczny i wystarczający na to, aby okrąg o równaniu $A|z|^2-\overline{B}z-B\overline{z}+C=0$ (por. zadanie 1.1) był rzutem stereograficznym wielkiego okręgu sfery S^2.

Zadanie 3. **(a)** Wykazać, że pole trójkąta sferycznego $\Delta\subset S^2$ o kątach wewnętrznych α, β, γ, którego bokami są łuki wielkich okręgów sfery S^2, wynosi $|\Delta|=\alpha+\beta+\gamma-\pi$.
(b) Obliczyć pole trójkąta sferycznego, którego bokami są łuki okręgów wielkich sfery S^2 łączące wierzchołki:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad(0,1,0).$$

Zadanie 4. Wyznaczyć rzut stereograficzny dowolnego czworościanu foremnego wpisanego w sferę S^2.

Zadanie 5. Niech $\mathbf{n}=(0,0,1)$ i $\mathbf{s}=(0,0,-1)$ oznaczają odpowiednio biegun północny i południowy sfery S^2. Przez $\phi\in(-\pi,\pi]$ oznaczamy długość, a przez $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ szerokość geograficzną, tj. powierzchnia $S^2\setminus\{\mathbf{n},\mathbf{s}\}$ ma parametryzację

$$(-\pi,\pi]\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\ni(\phi,\theta)\longmapsto(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,\sin\theta).$$

Odwzorowanie $\pi_{\mathsf{M}}\colon S^2 \setminus \{\mathbf{n},\mathbf{s}\} \to \mathbb{C}$ określone wzorem $\pi_{\mathsf{M}} = u + \mathrm{i}v$, gdzie

$$u(\phi,\theta) = \phi, \quad v(\phi,\theta) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right),$$

nazywamy *rzutem Merkatora*. Odwzorowanie $\pi_{\mathsf{L}} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi_{\mathsf{M}}\right)$ nazywamy natomiast *rzutem Lamberta-Lagrange'a.*

(a) Znaleźć funkcję holomorficzną $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełniającą warunek $f \circ \pi_{\mathsf{M}} = \pi|_{S^2\setminus\{\mathbf{n},\mathbf{s}\}}$.

(b) Wyrazić $\operatorname{Re}\pi_{\mathsf{L}}$ oraz $\operatorname{Im}\pi_{\mathsf{L}}$ jako funkcje zmiennych ϕ, θ.

(c) Wyznaczyć obraz $\pi_{\mathsf{L}}(S^2 \setminus \{\mathbf{n},\mathbf{s}\})$.

Zadanie 8 będzie polegało na podaniu dowodu konforemności rzutu stereograficznego opartego na podstawowych pojęciach geometrii różniczkowej. Niech M będzie powierzchnią regularną w $\mathbb{R}^3$ o równaniu $r = r(u,v)$ i niech $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to M$ będzie krzywą klasy C^1 leżąca na M określoną równaniami parametrycznymi $u = u(t)$, $v = v(t)$, tj. $\gamma(t) = r(u(t), v(t))$. Przypomnijmy, że *I formą podstawową* rozmaitości M w punkcie $\mathbf{x} \in M$ nazywamy standardowy iloczyn skalarny na płaszczyźnie stycznej $T_{\mathbf{x}}M$, który – jak każda forma dwuliniowa – określony jest przez pewną macierz kwadratową. Jeżeli r_u i r_v oznaczają pochodne cząstkowe wektora wodzącego powierzchni M względem u i v, a (x,y,z) jego funkcje składowe, to bazę przestrzeni $T_{\mathbf{x}}M$ tworzą wektory (x_u, y_u, z_u) i (x_v, y_v, z_v), a zatem macierz I formy podstawowej M ma postać

$$\begin{pmatrix} r_u^2 & r_u\cdot r_v \\ r_v\cdot r_u & r_v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 & x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v & x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{pmatrix}.$$

Za pomocą I formy podstawowej można np. łatwo wyrazić kwadrat elementu długości $\mathrm{d}s$ danej krzywej gładkiej γ na M:

$$\mathrm{d}s^2 = r_u^2 \mathrm{d}u^2 + 2r_u\cdot r_v \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + r_v^2 \mathrm{d}v^2,$$

gdzie $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ to różniczki (przyrosty) parametrów u i v na krzywej γ. Jest to inny sposób zapisania znanego wzoru na długość krzywej:

$$s = \int_\alpha^\beta |r'(u(t),v(t))|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r_u u'(t) + r_v v'(t))\cdot(r_u u'(t) + r_v v'(t))}\,\mathrm{d}t,$$

przy czym $\gamma(t) = r(u(t),v(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$ jest parametryzacją γ. W zadaniu 8 wykazanie konforemności rzutu stereograficznego zostaje sprowadzone do sprawdzenia pewnego prostego warunku na odpowiadające sobie przez ten rzut elementy długości krzywych. Przypomnijmy, że – zupełnie formalnie rzecz ujmując – element długości jest 1-formą różniczkową na danej powierzchni M (zob. [M. Spivak, „*Analiza na rozmaitościach*", PWN Warszawa 2005; rozdział 5]), ale taki formalizm nie jest nam tutaj potrzebny.

Zadanie 6 (rozgrzewkowe przed zadaniem 7)**.** Niech $p\colon (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to S^2$ będzie biegunową parametryzacją sfery S^2 o promieniu $r > 0$ bez jednego południka, tj.

$$p(\phi,\theta) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta).$$

Sprawdzić, że I forma podstawowa S^2 w punkcie $p(\phi,\theta)$ ma macierz $\left(\begin{smallmatrix} r^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & r^2 \end{smallmatrix}\right)$.

Zadanie 7 (przygotowawcze do zadania 8)**.** Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią regularną o I formie podstawowej postaci $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$, tj. $E = r_u^2$, $F = r_u\cdot r_v$, $G = r_v^2$ (zachowujemy oznaczenia z tekstu powyżej). Niech także γ_1, γ_2 będą krzywymi klasy C^1 leżącymi na M i przecinającymi się w punkcie P.

(a) Wykazać, że jeżeli $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ oraz δu, δv oznaczają różniczki parametrów u, v w punkcie P odpowiednio na krzywych γ_1 oraz γ_2, to cosinus kąta ϕ między tymi krzywymi w tym punkcie wyraża się wzorem

$$\cos\phi = \frac{E\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \delta u\mathrm{d}v) + G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

(b) Niech $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ $(i = 1, 2)$ będą powierzchniami regularnymi o I formach podstawowych postaci $\left(\begin{smallmatrix} E_i & F_i \\ F_i & G_i \end{smallmatrix}\right)$ $(i = 1, 2)$. Pokazać, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by dane odwzorowanie $\Phi\colon M_1 \to M_2$ było konforemne, jest równość

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2},$$

przy czym jeśli współczynniki formy odpowiadającej M_1 obliczamy w punkcie P, to te odpowiadające M_2 bierzemy w punkcie $\Phi(P)$.

Zadanie 8. Niech $\Gamma \subset \mathbb{C}$ będzie krzywą klasy C^1. Niech $\mathrm{d}s$ i $\mathrm{d}\sigma$ będą odpowiadającymi sobie przy rzucie stereograficznym (tj. wychodzącymi odpowiednio z punktów $z \in \Gamma$ oraz $\pi^{-1}(z)$) elementami długości na krzywych Γ i $\pi^{-1}(\Gamma)$. Podać formalną interpretację i uzasadnić równość

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} = \frac{2}{1 + |z|^2}.$$

Wywnioskować z niej, że rzut stereograficzny jest odwzorowaniem konforemnym.

Homografie (zwane też *przekształceniami Möbiusa*) to odwzorowania $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ postaci

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{(przy czym } f(\infty) = \frac{a}{c},\ f\Big(-\frac{d}{c}\Big) = \infty, \text{ gdy } c \neq 0).$$

Jeżeli $c \neq 0$, to możemy napisać

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)},$$

co oznacza, że f jest złożeniem $f = \Lambda_2 \circ \iota \circ \Lambda_1$, gdzie $\Lambda_1(z) = cz + d$ jest homotetią, $\iota(w) = w^{-1}$ inwersją, natomiast $\Lambda_2(u) = c^{-1}((bc - ad)u + 1)$ jest także homotetią. Jedną z kluczowych własności homografii jest to, że przeprowadzają one okręgi uogólnione (okrąg przechodzący przez ∞ to prosta) na okręgi uogólnione. Wobec powyższego przedstawienia wystarczy to sprawdzić dla inwersji $z \mapsto \iota(z) = z^{-1}$ i, rzeczywiście, nietrudne rachunki pokazują, że dla dowolnych $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq r$ obrazem okręgu $C(a, r)$ jest okrąg

$$C\Big(\overline{a}(|a|^2 - r^2)^{-1},\ r\big||a|^2 - r^2\big|^{-1}\Big)$$

Natomiast w przypadku, gdy $|a| = r \neq 0$, obrazem okręgu $C(a, |a|)$ jest symetralna odcinka $[0, a^{-1}]$. Można też zauważyć, że równanie w postaci Apoloniusza $\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = \lambda$ przechodzi przez inwersję w równanie

$$\left|\frac{w - 1/p}{w - 1/q}\right| = \lambda\left|\frac{q}{p}\right|.$$

Widzimy np. że obrazem prostej jest prosta, gdy $|p| = |q|$, jest nim zaś okrąg, gdy $|p| \neq |q|$.

Przeprowadzanie przez homografię okręgów uogólnionych na okręgi uogólnione można też wykazać posługując się pojęciem dwustosunku (por. zadanie 10) oraz następującymi dwoma faktami: (a) homografie zachowują dwustosunek; (b) wartość dwustosunku $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy z_1, z_2, z_3, z_4 leżą na jednym okręgu uogólnionym.

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem (zbiorem otwartym i spójnym). Odwzorowanie $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy *lokalnie konforemnym*, jeżeli jest lokalnym dyfeomorfizmem oraz zachowuje skierowane kąty między krzywymi gładkimi leżącymi i przecinającymi się w Ω. Wiadomo, że f jest lokalnie konforemne wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją holomorficzną oraz $f'(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \Omega$. Odwzorowanie między dwoma obszarami w $\mathbb{C}$ nazywamy *konforemnym* (*biholomorficznym*), jeżeli jest holomorficzną bijekcją. (Takie odwzorowanie musi być lokalnie konforemne, a odwrotne do niego jest także konforemne.) Odwzorowanie konforemne obszaru Ω na siebie nazywamy *automorfizmem*; zbiór wszystkich automorfizmów obszaru Ω oznaczamy symbolem $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Można np. pokazać (korzystając z twierdzenia Casoratiego-Weierstrassa oraz faktu, że każda funkcja całkowita mająca w punkcie ∞ osobliwość pozorną musi być wielomianem), że $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b\colon a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}$, czyli że automorfizmami $\mathbb{C}$ są homotetie.

Zadanie 9. **(a)** Traktując jako znany fakt, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ to grupa wszystkich homotetii, wykazać, że

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \colon a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}.$$

(b) Wyznaczyć przekształcenie $\varphi\colon S^2 \to S^2$ odpowiadające inwersji $\iota(z) = z^{-1}$, tj. takie, które spełnia warunek $\pi \circ \varphi = \iota \circ \pi$.

Uwaga. Możliwość wykonania przekształcenia φ tłumaczy w jaki sposób dodanie bieguna N powoduje, że grupa automorfizmów $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ jest istotnie większa w porównaniu z grupą $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Od tej pory będzie uzasadnione, aby zbiór wszystkich homografii oznaczać symbolem $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

Zadanie 10. Wykazać, że dla dowolnych trójek (z_1, z_2, z_3) i (w_1, w_2, w_3), z których każda składa się z parami różnych punktów $\overline{\mathbb{C}}$, istnieje dokładnie jedna homografia $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ spełniająca $f(z_i) = w_i$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$.

Wskazówka. Rozwiązanie można elegancko wyrazić wykorzystując pojęcie *dwustosunku* uporządkowanej czwórki liczb $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ (gdzie przynajmniej z_2, z_3, z_4 są parami różne) zdefiniowanego jako

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Zadanie 11. Wykazać, że obrazem hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ przez inwersję $\iota(z) = z^{-1}$ jest lemniskata Bernoulliego o ogniskach $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie trójki $(z_0, r, \varrho) \in \mathbb{C} \times (0, \infty) \times (0, 1)$, dla których istnieje homografia $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ przekształcająca obszar $\{z\colon \mathrm{Re}\, z > 0,\ |z - z_0| > r\}$ na pierścień $\{z\colon \varrho < |z| < 1\}$. Dla każdej z takich trójek rozstrzygnąć, ile istnieje odpowiednich homografii.

Zadanie 13. Niech $0 < R < h$. Wyznaczyć wartość $\varrho \in (0, 1)$, dla której istnieje homografia $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ spełniająca warunki:

(i) $f(\{\mathrm{Re}\, z > 0,\ |z - h| \geqslant R\}) = \{\varrho < |w| < 1\}$,

(ii) $f(\{\mathrm{Re}\, z = 0\}) = \{|w| = 1\}$.

Podać ogólną postać homografii f spełniającej (i) oraz (ii).

Punktem stałym homografii $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ nazywamy każdy punkt $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ spełniający warunek $f(z_0) = z_0$. Poza trywialnym przypadkiem homografii identycznościowej $f(z) = z$, każda homografia ma dokładnie jeden lub dwa punkty stałe (wliczając w to ewentualnie punkt $z_0 = \infty$). W przypadku homografii *znormalizowanej* (tj. takiej, że $ad - bc = 1$), i różnej od identyczności, punkty te wyliczamy ze wzoru

$$\xi_\pm = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Dzieląc ewentualnie każdy ze współczynników a, b, c, d przez $\pm\sqrt{ad-bc}$, możemy oczywiście sprowadzić dowolną homografię f do postaci znormalizowanej. Z powyższego wzoru widzimy więc, że f ma dokładnie jeden punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy $a + d = \pm 2\sqrt{ad-bc}$. W takim przypadku, oznaczając przez ξ_0 jedyny punkt stały, f daje się zapisać w *postaci kanonicznej*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{w-\xi_0} = \dfrac{1}{z-\xi_0} + h, & \text{jeżeli } \xi_0 \neq \infty, \\ w = z + h, & \text{jeżeli } \xi_0 = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Jeżeli f ma dwa różne punkty stałe ξ_0 i ξ_1, to jej *postacią kanoniczną* jest

$$\begin{cases} \dfrac{w-\xi_0}{w-\xi_1} = k\,\dfrac{z-\xi_0}{z-\xi_1}, & \text{jeżeli } \xi_0 \neq \infty,\ \xi_1 \neq \infty, \\ w - \xi_0 = k(z-\xi_0), & \text{jeżeli } \xi_1 = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

(Zauważmy, że ∞ jest punktem stałym wtedy i tylko wtedy, gdy f jest homotetią.)

Mówimy, że homografia f jest typu

- *parabolicznego*, jeżeli ma dokładnie jeden punkt stały.

Jeżeli f ma dwa punkty stałe i postać kanoniczną jak powyżej, to mówimy, że f jest typu:

- *hiperbolicznego*, jeżeli $k > 0$;
- *eliptycznego*, jeżeli $k = e^{\mathrm{i}\theta}$ dla $\theta \in (0, 2\pi)$;
- *loksodromicznego*, jeżeli $k = ae^{\mathrm{i}\theta}$ dla $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

Zadanie 14. Niech $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$. Wykazać, że – w zależności od typu – f ma jedną z postaci kanonicznych wyrażonych wzorami (1) i (2). Pokazać następnie, że jeżeli f ma postać znormalizowaną

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (\text{tj. } ad - bc = 1),$$

to zachodzą równoważności:

- f jest typu parabolicznego $\iff$ $a + d \in \mathbb{R}$ oraz $|a+d| = 2$;
- f jest typu hiperbolicznego $\iff$ $a + d \in \mathbb{R}$ oraz $|a+d| > 2$;
- f jest typu eliptycznego $\iff$ $a + d \in \mathbb{R}$ oraz $|a+d| < 2$;
- f jest typu loksodromicznego $\iff$ $a + d \notin \mathbb{R}$.

Zadanie 15 (rozgrzewkowe przed zadaniem 16)**.** Uzasadnić, że dla dowolnych dwóch punktów $\xi_0, \xi_1 \in \overline{\mathbb{C}}$, $\xi_0 \neq \xi_1$, istnieje nieskończenie wiele okręgów ortogonalnych do rodziny wszystkich (uogólnionych) okręgów przechodzących przez ξ_0 i ξ_1. Wyznaczyć przykładowo środek i promień każdego okręgu ortogonalnego jednocześnie do wszystkich okręgów przechodzących przez punkty ± 1.

Zadanie 16. Załóżmy, że $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ ma punkty stałe $\xi_0 \neq \xi_1$. Udowodnić, że:

(i) jeżeli f jest typu hiperbolicznego, to każdy okrąg przechodzący przez ξ_0 i ξ_1 jest niezmienniczy względem f, przy czym f nie zmienia jego orientacji;

(ii) jeżeli f jest typu eliptycznego, to każdy okrąg ortogonalny do rodziny okręgów przechodzących przez ξ_0 i ξ_1 jest niezmienniczy względem f, przy czym f nie zmienia jego orientacji.

Ważną rolę w analizie zespolonej i geometrii hiperbolicznej pełnią pewne specjalne homografie postaci

$$B_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}, \quad \text{przy czym } |a|<1,$$

które nazywamy *czynnikami Blaschkego* (przy $|a| = 1$ funkcja B_a byłaby stała, zaś przy $|a| > 1$ koło jednostkowe przechodziłoby na swoje zewnętrze). Nazwa bierze się stąd, że homografie te pojawiają się jako czynniki tzw. iloczynu Blaschkego określającego funkcję holomorficzną o zadanych pierwiastkach; zob. np. [W. Rudin, „*Analiza rzeczywista i zespolona*", PWN Warszawa 2009; rozdział 15]. Dokładnie te homografie (z dokładnością do czynnika postaci $e^{\mathrm{i}\theta}$) okazują się też być tzw. *ruchami nieeuklidesowymi* czyli tymi homografiami, które przekształcają koło jednostkowe $D = \{|z| < 1\}$ na siebie, co jest treścią zadania 17. Korzystając z lematu Schwarza, można wykazać, że w istocie każde odwzorowanie konforemne D na siebie jest, z dokładnością do stałego czynnika, jednym z czynników Blaschkego, tzn. $\mathrm{Aut}(D) = \{\lambda B_a \colon \lambda, a \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, |a| < 1\}$ (zob. np. [J. Birkholc, „*Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*", PWN Warszawa 2013; §3.10]).

Zadanie 17. (a) Wykazać, że ogólną postacią homografii przekształcającej koło jednostkowe D na siebie jest czynnik Blaschkego złożony z obrotem, tj. homografia $\lambda B_a(z)$ (gdzie $|a| < 1$, $|\lambda| = 1$).

(b) W zależności od parametru $a \in D$ scharakteryzować typ homografii B_a. Pokazać w szczególności, że żadna z tych homografii nie jest typu loksodromicznego.

Zadanie 18. Niech $\Gamma\colon [\alpha, \beta] \to D$ będzie krzywą regularną, tzn. istnieją takie punkty $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta$, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ funkcja Γ jest klasy C^1 na $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ i ma różne od zera granice jednostronne pochodnej na końcach przedziału. Definiujemy *długość hiperboliczną* krzywej Γ wzorem

$$|\Gamma|_{\mathsf{h}} = \int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}s}{1-|z|^2},$$

gdzie $\mathrm{d}s$ jest elementem długości (euklidesowej) na Γ.

(a) Znaleźć równanie parametryczne *odcinka nieeuklidesowego* $[1, \mathrm{i}]_{\mathsf{h}}$, tj. łuku okręgu ortogonalnego do $C(0, 1)$ o końcach 1, i.

(b) Obliczyć $|[1, \mathrm{i}]|_{\mathsf{h}}$ i $|[1, \mathrm{i}]_{\mathsf{h}}|_{\mathsf{h}}$, czyli długości hiperboliczne odcinka euklidesowego i nieeuklidesowego łączącego punkty 1, i.

Zadanie 19. Niech $z_1, z_2 \in D$. Wykazać, że krzywą regularną łączącą punkty z_1 i z_2, która minimalizuje długość hiperboliczną, jest odcinek nieeuklidesowy $[z_1, z_2]_{\mathsf{h}}$. Jej długość oznaczamy przez $\rho(z_1, z_2)$, a funkcję ρ nazywamy *metryką hiperboliczną*. Wyprowadzić wzór

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |(z_1 - z_2)/(1 - z_1\overline{z}_2)|}{1 - |(z_1 - z_2)/(1 - z_1\overline{z}_2)|}\,.$$

Zadanie 20. Niech $f \in \mathrm{Aut}(D)$ (a więc, z dokładnością do obrotu, f jest czynnikiem Blaschkego) i załóżmy, że $x_0 := f^{-1}(0) \in \mathbb{R}$. Dla $\gamma \in [0, \pi]$ oznaczmy przez Γ długość obrazu łuku $\{e^{\mathrm{i}\theta} \colon 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma\}$ przez homografię f. Udowodnić, że

$$\Gamma = \frac{1+x_0}{1-x_0}\gamma + O(\gamma^3) \quad \text{przy } \gamma \to 0^+.$$