Funkcje analityczne

Część 3: Funkcje holomorficzne; zasada maksimum

Oznaczenia: $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$; $H(\Omega)$ zbiór funkcji holomorficznych (analitycznych) na zbiorze otwartym Ω; $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $\mathrm{ind}_\Gamma(z)$ indeks punktu z względem krzywej Γ

Zadanie 1. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dla $z \in \mathbb{C}$ spełniającego $\mathrm{Im}\, z > 0$ oznaczmy przez $\varphi(z) \in (0, \pi)$ kąt, pod jakim z punktu z widziany jest odcinek $[a, b]$. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f \in H(\{z\colon \mathrm{Im}\, z > 0\})$, dla której $\mathrm{Re}\, f = \varphi$.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f \in H(\mathbb{C}_*)$, że $|f(z)|$ jest funkcją stałą na każdym z okręgów o równaniu $|z|^2 - a\mathrm{Re}\, z = 0$ ($a \in \mathbb{R}$).

Zadanie 3. Niech μ będzie σ-addytywną miarą zespoloną (a więc ograniczoną) na przestrzeni mierzalnej X. Niech także $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, a $\Phi\colon \Omega \times X \to \mathbb{C}$ funkcją ograniczoną spełniającą warunki:

- $X \ni x \longmapsto \Phi(z, x)$ jest funkcją mierzalną dla każdego $z \in \Omega$;
- $\Omega \ni z \longmapsto \Phi(z, x)$ jest funkcją holomorficzną w Ω dla każdego $x \in X$.

Wykazać, że funkcja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zdefiniowana wzorem

$$f(z) = \int_X \Phi(z, x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

jest holomorficzna w Ω.

Uwaga. Następujący fakt jest szczególnym przypadkiem powyższej tezy (dlaczego?): Jeżeli μ jest miarą zespoloną na X, $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ funkcją mierzalną, a $\Omega \subset \mathbb{C}$ zbiorem otwartym rozłącznym z $\varphi(X)$, to funkcja $f(z) = \int_X (\varphi(x) - z)^{-1}\, \mathrm{d}\mu(x)$ jest holomorficzna w Ω. W tym przypadku dość łatwo dowodzi się analityczności f wskazując bezpośrednio odpowiedni szereg potęgowy zbieżny w kołowym otoczeniu dowolnie ustalonego punktu $z \in \Omega$; zob. [W. Rudin, „*Analiza rzeczywista i zespolona*”, PWN Warszawa 2009; tw. 10.7].

W rozwiązaniu następnego zadania można oprzeć się na tezie zadania 3; można też użyć *twierdzenia Morery*: Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, a $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą spełniającą $\int_{\partial\Delta} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$ dla każdego trójkąta domkniętego $\Delta \subset \Omega$, to $f \in H(\Omega)$.

Zadanie 4. Wyznaczyć maksymalny obszar $\Omega \subset \mathbb{C}$, na którym funkcje określone wzorami poniżej są holomorficzne:

(a) $f(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + tz}$,

(b) $g(z) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{tz}}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$,

(c) $h(z) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{tz}}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$.

Przypomnijmy, że *łańcuchem* nazywamy sumę formalną $\Gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, gdzie γ_i są drogami na płaszczyźnie, definiowaną przez wzór $\int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\, \mathrm{d}z$ dla każdej zespolonej funkcji ciągłej f na $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*$. Symbol γ_i^* oznacza tutaj obraz krzywej γ_i, a zatem Γ^* jest obrazem łańcucha Γ. Jeżeli każda z dróg γ_i jest zamknięta, to Γ nazywamy *cyklem*. Możemy oczywiście zapisać też Γ w postaci $\Gamma = \sum_{j=1}^m k_j \gamma_j$, gdzie drogi γ_j są parami różne, a $k_j \in \mathbb{Z}$. Wszelkie pojęcia związane z całkowaniem po krzywych łatwo przenoszą się na łańcuchy. W szczególności jeżeli Γ jest cyklem postaci jak powyżej, a punkt z_0 nie leży w obrazie Γ^*, to *indeks* z_0 *względem* Γ określamy jako $\mathrm{ind}_\Gamma(z_0) = \sum_{j=1}^m k_j \mathrm{ind}_{\gamma_j}(z_0)$.

Zadanie 5. Pokazać, że dla dowolnego cyklu Γ i punktów $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ spełniających warunek $\operatorname{ind}_\Gamma(a) = \operatorname{ind}_\Gamma(b)$ zachodzi równość

$$\int_\Gamma (z-a)^{-m}(z-b)^{-n} dz = 0 \quad \text{dla } m, n \in \mathbb{N}.$$

Wskazówka. Rozważyć najpierw przypadek $m = n = 1$, który sprowadza się do podstawowych własności indeksu. Uzasadnić następnie, że można dokonać różniczkowania pod znakiem całki.

Zadanie 6. Załóżmy, że $f \in H(D)$ spełnia warunek

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f'(re^{\mathrm{i}t})| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Pokazać, że $\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$.

Zadanie 7. Niech $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie taką funkcją holomorficzną, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz pewnych $a, b > 0$ mamy $|f(z)| \leqslant a + b|z|^k$. Pokazać, że f jest wielomianem.

W dowodzie tezy (a) poniższego zadania przyda się fakt, że jedynymi funkcjami całkowitymi z biegunem w punkcie ∞ są wielomiany (por. zadanie 7). W naszym przypadku należy sprawdzić, że funkcja f ma osobliwości pozorne w punktach 0 i ∞ (skończone granice równe zeru) oraz jeden biegun czterokrotny w punkcie $z = 1$, z czego będzie wynikać, że f jest funkcją wymierną.

Zadanie 8. Dla dowolnej liczby zespolonej $z \notin \{0, 1\}$ zdefiniujmy

$$f(z) = \sum (\log z)^{-4},$$

gdzie suma brana jest po wszystkich gałęziach logarytmu.

(a) Pokazać, że istnieją takie wielomiany zespolone p i q, że $f(z) = p(z)/q(z)$ dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
(b) Pokazać, że dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ zachodzi

$$f(z) = z \cdot \frac{z^2 + 4z + 1}{6(z-1)^4}.$$

Zadanie 9. Niech $f(z) = p(z)/q(z)$, gdzie p i q są takimi wielomianami zespolonymi, że $\deg p > \deg q$, przy czym wszystkie pierwiastki wielomianu p leżą w D, natomiast wszystkie pierwiastki wielomianu q leżą w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Udowodnić, że

$$\max_{|z|=1} |f'(z)| > \frac{\deg p - \deg q}{2} \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

W rozwiązaniach zadań 10–14 należy zastosować zasadę maksimum.

Zadanie 10. Niech $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}$. Wykazać, że jeżeli $|p(z)| = 1$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ spełniającego $|z| = 1$, to $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Zadanie 11. Niech $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie taką funkcją holomorficzną, że $|f(z)| = 1$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ spełniającego $|z| = 1$. Wykazać, że istnieją $\vartheta \in \mathbb{R}$ oraz $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ takie, że

$$f(z) = \mathrm{e}^{i\vartheta} z^k \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}.$$

Zadanie 12 (*Twierdzenie Hadamarda o trzech kołach*)**.** Niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze zawierającym pierścień $\{r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$, gdzie $0 < r_1 < r_2$. Oznaczmy $M_r = \max_{|z|=r} |f(z)|$ dla $r \in [r_1, r_2]$. Udowodnić nierówność

$$M_r^{\ln(r_2/r_1)} \leqslant M_{r_1}^{\ln(r_2/r)} M_{r_2}^{\ln(r/r_1)} \quad \text{dla } r \in [r_1, r_2].$$

Uwaga. Tezę można też wysłowić mówiąc, że $r \mapsto \ln M_{\ln r}$ jest funkcją wypukłą.

Zadanie 13. Niech $p(z)$ będzie wielomianem zespolonym stopnia n. Załóżmy, że E_1, E_2 są elipsami o wspólnych ogniskach i półosiach odpowiednio a_1, b_1 i a_2, b_2, przy czym $a_1 < a_2$ oraz $b_1 < b_2$. Udowodnić nierówność

$$\frac{\max_{z \in E_1} |f(z)|}{(a_1 + b_1)^n} \geqslant \frac{\max_{z \in E_2} |f(z)|}{(a_2 + b_2)^n}.$$

Zadanie 14. Niech $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \ldots + a_n z^n$ będzie wielomianem zespolonym. Załóżmy, że $1 = c_0 \geqslant c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_n \geqslant 0$ jest *wypukłym* ciągiem liczb rzeczywistych (tzn. $2c_k \leqslant c_{k-1} + c_{k+1}$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$). Określmy wielomian

$$q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + c_2 a_2 z^2 + \ldots + c_n a_n z^n.$$

Udowodnić, że

$$\max_{|z| \leqslant 1} |q(z)| \leqslant \max_{|z| \leqslant 1} |p(z)|.$$

W ostatnich dwóch zadaniach należy zastosować lemat Schwarza.

Zadanie 15 (*Lemat Schwarza-Picka*)**.** Wykazać, że każde odwzorowanie $f \in H(D)$ spełnia nierówność

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \text{dla } z \in D,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathrm{Aut}(D)$.

Zadanie 16. Załóżmy, że funkcja $f \in H(D)$ spełnia warunki: $f(0) = 0$ oraz $|\mathrm{Re}\, f(z)| < 1$ dla każdego $z \in D$. Wykazać, że dla każdego $z \in D$ zachodzą wówczas silniejsze nierówności:

$$|\mathrm{Re}\, f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} |z| \qquad \text{oraz} \qquad |\mathrm{Im}\, f(z)| \leqslant \frac{2}{\pi} \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$