Tomasz Komorowski
IM PAN, Warszawa
Stefano Olla
CEREMADE, Univ. Paris-Dauphine, Paris

Transport energii w układzie oscylatorów harmonicznych ze zdegenerowanym szumem

Omówię zagadnienie transportu energii w jednowymiarowym przewodniku. Jest on modelowany przy pomocy nieskończonego układu oscylatorów harmonicznych ze zdegenerowanym szumem. W przypadku, gdy układ nie jest poddany działaniu zewnętrznego pola potencjału, mówimy wtedy, iż jest on *niezwiązany*, ang. *unpinned*.

Ze względu na obecność szumu dynamika łańcucha zachowuje jedynie trzy wielkości: *masę*, *całkowity pęd układu* oraz *energię*. Pokażemy istnienie dwóch skal, w których przebiega ewolucja energii. Przy *skalowaniu hiperbolicznym*, tj. gdy współrzędne czasowe i przestrzenne są przeskalowane następująco: $(t\epsilon^{-1}, x\epsilon^{-1})$, granica, przy $\epsilon \ll 1$, funkcji gęstości trzech zachowywanych wielkości $(r(t,y), p(t,y), e(t,y))$, reprezentujących odpowiednio: gęstość masy, prędkość (pęd) i gęstość energii we współrzędnych lagranżowskich, spełnia (ściśliwy) *układ równań Eulera*

$$\begin{aligned} \partial_t r &= \partial_y p, \\ \partial_t p &= \partial_y \tau(r,u), \\ \partial_t e &= \partial_y [p\tau(r,u)], \\ r(0,y) = r_0(y),\ & p(0,y) = p_0(y),\ e(0,y) = e_0(y), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $u(t,y) := e(t,y) - p^2(t,y)/2$ jest gęstością *energii wewnętrznej* układu, zaś $\tau(r,u)$ jest *funkcją ciśnienia*, która może być obliczona z relacji termodynamicznych związanych ze stanem równowagi łańcucha. W omawianym przypadku liniowego łańcucha $\tau(r,u) := \tau_1 r$, gdzie $\tau_1 > 0$ (prędkość dźwięku). Łatwo można zauważyć, iż wówczas

$$T(y) := e(t,y) - \frac{1}{2}(p^2(t,y) + \tau_1 r^2(t,y)) \tag{2}$$

jest stacjonarnym rozwiązaniem układu (1) (tj. nie zależy od t). Ewolucja tej składowej gęstości energii ma miejsce w dłuższej, tj. superdyfuzyjnej skali. Dokładniej, jeśli skalowanie współrzędnych ma postać $(t\epsilon^{-3/2}, x\epsilon^{-1})$, to graniczna gęstość energii $T(t,y)$ spełnia równanie

$$T(t,y) = -\hat{c}|\Delta_y|^{3/4} T(t,y), \qquad T(0,y) = T(y), \tag{3}$$

gdzie $\hat{c} > 0$ jest pewnym parametrem, który dany jest jawnym wzorem. Powyższy opis sugeruje więc istnienie naturalnego rozkładu funkcjonału energii na część

$$e_{\mathrm{mech}}(t,y) := \frac{1}{2}(p^2(t,y) + \tau_1 r^2(t,y)),$$

która podlega ewolucji zgodnie z (1) oraz część daną przez (2), która ewoluuje w dłuższej superdyfuzyjnej skali zgodnie z (3). Tę pierwszą składową nazywamy *energią mechaniczną* łańcucha, podczas gdy ta druga część nazwana została przez nas *energią cieplną*.

Bibliografia

[1] G. Basile, S. Olla, *Energy diffusion in harmonic system with conservative noise*, J. Stat. Phys. 155 (2014), 1126–1142.
[2] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla, *Superdiffusion of energy in a chain of harmonic oscillators with noise*, Commun. Math. Phys. 339 (2015), 407–453.
[3] T. Komorowski, S. Olla, *Ballistic and superdiffusive scales in macroscopic evolution of a chain of oscillators*, `http://arxiv.org/abs/1506.06465`.