

Optymalna estymacja parametrów w wielowymiarowym modelu z blokowo-symetryczną macierzą kowariancji

Arkadiusz Kozioł

Kościelisko 2016, 5-13 Września

1. Wielowymiarowe dane z powtórzeniami - dziedziny zastosowań

Wielowymiarowe dane z powtórzeniami stały się niezwykle ważne w wielu różnych dziedzinach nauki, m. in. takich jak:

- biomedyczne,
- medyczne,
- inżynierskie,
- farmaceutyczne.

2.1. Blokowo-symetryczna struktura kowariancji dla podwójnie wielowymiarowych danych - postać

Blokowo-symetryczną strukturę kowariancji wymiaru $(mu \times mu)$ – dla m -wymiarowych obserwacji mierzonych ze względu na u czynników definiuje się następująco:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_0 & \mathbf{\Gamma}_1 & \dots & \mathbf{\Gamma}_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_1 & \dots & \mathbf{\Gamma}_0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}_u \otimes (\mathbf{\Gamma}_0 - \mathbf{\Gamma}_1) + \mathbf{J}_u \otimes \mathbf{\Gamma}_1 \\ &= \mathbf{I}_u \otimes \mathbf{\Gamma}_0 + (\mathbf{J}_u - \mathbf{I}_u) \otimes \mathbf{\Gamma}_1.\end{aligned}$$

2.2. Blokowo-symetryczna struktura kowariancji dla podwójnie wielowymiarowych danych - założenia

1. $\mathbf{\Gamma}_0$ jest dodatnio określoną, symetryczną macierzą wymiaru $m \times m$,
2. $\mathbf{\Gamma}_1$ jest symetryczną macierzą wymiaru $m \times m$,
3. $-\frac{1}{u-1}\mathbf{\Gamma}_0 \prec \mathbf{\Gamma}_1$ co oznacza, że: $\mathbf{\Gamma}_0 + (u-1)\mathbf{\Gamma}_1$ jest dodatnio określoną macierzą,
4. $\mathbf{\Gamma}_1 \prec \mathbf{\Gamma}_0$ co oznacza, że: $\mathbf{\Gamma}_0 - \mathbf{\Gamma}_1$ jest dodatnio określoną macierzą.

Zatem macierz $um \times um$ oznaczona jako $\mathbf{\Gamma}$ jest dodatnio określona.

3. Modele z różnymi strukturami wektora średnich - notacja

Niech $\mathbf{y}_{r,s}$ będzie m -wymiarowym wektorem pomiarów dla r -tego obiektu ze względu na s -ty czynnik; $r = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, u$. Wszystkie cechy n badanych obiektów są niezależne.

Niech $\mathbf{y}_r = (\mathbf{y}'_{r,1}, \dots, \mathbf{y}'_{r,u})'$ będzie mu -wymiarowym wektorem pomiarów odpowiadającym r -temu obiektowi.

Ostatecznie, niech $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ będzie próbą losową wymiaru n z wielowymiarowego rozkładu normalnego.

3.1. Model z dowolną strukturą wektora średnich

W modelu tym zakładamy, że struktura kowariancji jest blokowo-symetryczna oraz że **wartości w wektorze średnich mogą się zmieniać pomiędzy czynnikami bądź punktami czasowymi**. Zatem wektor ten ma następującą postać: $\mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\mu}$, gdzie $\boldsymbol{\mu}$ ma um komponentów.

$$\mathbf{y}_{num \times 1} = \text{vec}(\mathbf{Y}'_{um \times n}) \sim N\left((\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_{um})\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Gamma}_{um}\right).$$

To oznacza, że n niezależnych, losowych wektorów kolumnowych ma identyczny rozkład z $(um \times um)$ -wymiarową macierzą wariancji-kowariancji.

3.2. Model z określoną strukturą wektora średnich

W tym przypadku założenie odnośnie struktury kowariancji jest takie samo jak w pierwszym modelu, natomiast o wektorze średnich zakładamy, że **jego wartości pozostają takie same pomiędzy czynnikami bądź punktami czasowymi**. Zatem wektor ten ma następującą postać: $\mathbf{1}_{nu} \otimes \boldsymbol{\mu}$ gdzie $\boldsymbol{\mu}$ ma m składowych.

$$\mathbf{y}_{num \times 1} = \text{vec}(\mathbf{Y}'_{um \times n}) \sim N\left((\mathbf{1}_{nu} \otimes \mathbf{I}_m)\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Gamma}_{um}\right).$$

To oznacza, że n niezależnych, losowych wektorów kolumnowych ma identyczny rozkład z $(um \times um)$ –wymiarową macierzą wariancji-kowariancji.

3.3. Ortogonalne rzuty na podprzestrzeń wektora średnich

Rzuty te oznaczane będą za pomocą litery \mathbf{P} i wykorzystane, żeby pokazać iż jeśli $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_{um} \in \mathfrak{V} = sp\{\mathbf{V}\}$, gdzie $\mathbf{V} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Gamma}$, to oznacza, że $\mathbf{P}\mathbf{y}$ jest najlepszym, liniowym, nieobciążonym estymatorem (BLUE) wtedy i tylko wtedy, gdy \mathbf{P} komutuje ze wszystkimi macierzami kowariancji \mathbf{V} .

Ortogonalne rzuty na podprzestrzeń wektora średnich dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich:

$$\mathbf{P}_{[1]} = \frac{1}{n} \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{I}_{um},$$

Ortogonalne rzuty na podprzestrzeń wektora średnich dla modelu z określoną strukturą wektora średnich:

$$\mathbf{P}_{[2]} = \frac{1}{n} \mathbf{J}_n \otimes \frac{1}{u} \mathbf{J}_u \otimes \mathbf{I}_m.$$

3.3. Ortogonalne rzuty na podprzestrzeń wektora średnich - cd.

Rezultat 1. *Dla obu modeli macierz rzutu \mathbf{P} komutuje z macierzą kowariancji \mathbf{V} , to jest, $\mathbf{PV} = \mathbf{VP}$, gdzie $\mathbf{V} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{\Gamma}$, macierz kowariancji wektora \mathbf{y} .*

Lemat. *Niech ϑ oznacza podprzestrzeń rozpiętą przez \mathbf{V} , to jest, $\vartheta = sp\{\mathbf{V}\}$. Wtedy, ϑ jest kwadratową podprzestrzenią, co oznacza, że ϑ jest liniową przestrzenią i jeśli $\mathbf{V} \in \vartheta$ to $\mathbf{V}^2 \in \vartheta$ (definicja w Seely (1971)).*

Kwadratowa podprzestrzeń jest szczególnym przypadkiem jednej z czterech algebr Jordana (1934).

3.4. BLUE dla $\boldsymbol{\mu}$

Z faktu, że dla obu modeli ortogonalne rzuty na przestrzeń generowaną przez wektor średnich komutują ze wszystkimi macierzami kowariancji, wynika, że istnieje BLUE dla każdej estymowalnej funkcji średniej. Co więcej BLUE są estymatorami najmniejszych kwadratów (LSE), ze względu na Rezultat 1. Zatem, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ jest jedynym rozwiązaniem następujących równań normalnych:

Dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich:

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_{um})'(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_{um})\boldsymbol{\mu}_{[1]} &= (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{I}_{um})'\mathbf{y} \quad \text{lub} \\ n\mathbf{I}_{um}\boldsymbol{\mu}_{[1]} &= [\mathbf{I}_{um}, \mathbf{I}_{um}, \dots, \mathbf{I}_{um}]\mathbf{y},\end{aligned}$$

co oznacza, że:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[1]} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \mathbf{y}_r.$$

3.4. BLUE dla $\boldsymbol{\mu}$ - cd.

Dla modelu z określoną strukturą wektora średnich:

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_{nu} \otimes \mathbf{I}_m)'(\mathbf{1}_{nu} \otimes \mathbf{I}_m)\boldsymbol{\mu}_{[2]} &= (\mathbf{1}_{nu} \otimes \mathbf{I}_m)'\mathbf{y} \quad \text{lub} \\ nu\mathbf{I}_m\boldsymbol{\mu}_{[2]} &= [\mathbf{I}_m, \mathbf{I}_m, \dots, \mathbf{I}_m]\mathbf{y},\end{aligned}$$

co oznacza, że:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[2]} = \frac{1}{nu} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^u \mathbf{y}_{r,s}.$$

3.5. Baza dla kwadratowej podprzestrzeni \mathfrak{V}

Definiujemy

$$\mathbf{A}_{ii} = \mathbf{E}_{ii} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}, \quad \text{dla } i < j; \quad \text{oraz } j = 1, \dots, m,$$

jako bazę dla symetrycznych macierzy Γ . $(m \times m)$ -wymiarowe macierze \mathbf{E}_{ij} mają 1 tylko na pozycji ij -tej, oraz 0 na wszystkich pozostałych pozycjach.

Wtedy jest jasne, że baza dla diagonalnych macierzy postaci $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_u \otimes \Gamma_0$ jest tworzona przez macierze

$$\mathbf{K}_{ij}^{(0)} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_u \otimes \mathbf{A}_{ij}, \quad \text{dla } i \leq j, \quad j = 1, \dots, m$$

oraz baza dla macierzy postaci $\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_u - \mathbf{I}_u) \otimes \Gamma_1$ jest tworzona przez macierze

$$\mathbf{K}_{ij}^{(1)} = \mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{J}_u - \mathbf{I}_u) \otimes \mathbf{A}_{ij}, \quad \text{dla } i \leq j, \quad j = 1, \dots, m.$$

3.6. Zupełne i minimalne statystyki dostateczne dla rodziny rozkładów normalnych

Niech $\mathbf{M}_{[1]} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_u \otimes \mathbf{I}_m - \mathbf{P}_{[1]}$ oraz $\mathbf{M}_{[2]} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_u \otimes \mathbf{I}_m - \mathbf{P}_{[2]}$. Tak więc $\mathbf{M}_{[1]}$ i $\mathbf{M}_{[2]}$ są idempotentne. Ponieważ dla obu modeli $\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{P}$, oraz \mathfrak{V} jest kwadratową przestrzenią, $\mathbf{M}\mathfrak{V}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathfrak{V}$ jest także kwadratową przestrzenią.

Rezultat 2. *Zupełne i minimalne statystyki dostateczne dla rodziny rozkładów normalnych dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich są postaci:*

$$(\mathbf{1}'_n \otimes \mathbf{I}_{um})\mathbf{y}.$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{M}_{[1]}\mathbf{K}_{ij}^{(l)}\mathbf{M}_{[1]}\mathbf{y}, \quad l = 0, 1, \quad i \leq j, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Zob. Seely (1977) oraz Zmyślony (1980).

3.6. Zupełne i minimalne statystyki dostateczne dla rodziny rozkładów normalnych - cd.

Rezultat 3. *Zupełne i minimalne statystyki dostateczne dla rodziny rozkładów normalnych dla modelu z określoną strukturą wektora średnich są postaci:*

$$(\mathbf{1}'_{nu} \otimes \mathbf{I}_m)\mathbf{y}.$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{M}_{[2]}\mathbf{K}_{ij}^{(l)}\mathbf{M}_{[2]}\mathbf{y}, l = 0, 1, i \leq j, i, j = 1, \dots, m.$$

Zob. Seely (1977) oraz Zmysłony (1980).

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji

Z faktu, że \mathbf{P} komutuje z macierzą kowariancji wektora \mathbf{y} , dla każdego z parametrów kowariancji istnieje BQUE wtedy i tylko wtedy, gdy

$$sp\{\mathbf{MVM}\},$$

jest kwadratową podprzestrzenią (zob. Zmysłony (1976, 1980) i Gnot et al. (1976, 1977a,c)) lub algebrą Jordana (zob. Jordan et al. (1934)), gdzie \mathbf{V} oznacza macierz kowariancji wektora \mathbf{y} . Jest jasne, że jeśli $sp\{\mathbf{V}\}$ jest kwadratową podprzestrzenią i jeśli dla każdego $\mathbf{\Sigma} \in sp\{\mathbf{V}\}$ zachodzi komutowanie $\mathbf{P}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}\mathbf{P}$ to $sp\{\mathbf{MVM}\} = sp\{\mathbf{MV}\}$ jest także kwadratową podprzestrzenią.

Zgodnie z podejściem bez współrzędnych, wartość oczekiwana $\mathbf{Myy}'\mathbf{M}$ może zostać przedstawiona jako kombinacja liniowa macierzy $\mathbf{MK}_{ij}^{(0)}$ i $\mathbf{MK}_{ij}^{(1)}$ z nieznanymi współczynnikami odpowiednio $\sigma_{ij}^{(0)}$ i $\sigma_{ij}^{(1)}$.

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji - cd.

Warto także zwrócić uwagę na to, że operator identycznościowy kowariancji $\mathbf{y}\mathbf{y}'$ należy do $sp\{cov(\mathbf{y}\mathbf{y}')\}$. To oznacza, że najlepsze kwadratowe estymatory są estymatorami najmniejszych kwadratów dla odpowiednich parametrów $\sigma_{ij}^{(0)}$ oraz $\sigma_{ij}^{(1)}$.

Dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich macierze $\mathbf{M}_{[1]}\mathbf{K}_{ij}^{(0)}$ i $\mathbf{M}_{[1]}\mathbf{K}_{ij}^{(1)}$ są ortogonalne. To oznacza, że parametry $\sigma_{[1]ij}^{(0)}$ i $\sigma_{[1]ij}^{(1)}$ mogą być wyznaczone niezależnie.

Dla modelu z określoną strukturą wektora średnich macierze $\mathbf{M}_{[2]}\mathbf{K}_{ij}^{(0)}$ i $\mathbf{M}_{[2]}\mathbf{K}_{ij}^{(1)}$ nie są ortogonalne. Zatem parametry $\sigma_{[2]ij}^{(0)}$ oraz $\sigma_{[2]ij}^{(1)}$ nie mogą być wyznaczone niezależnie.

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji - cd.

Definiując $\frac{m(m+1)}{2}$ wymiarowe wektory kolumnowe $\boldsymbol{\sigma}_{[1]}^{(l)} = [\sigma_{[1]ij}^{(l)}]$ oraz $\boldsymbol{\sigma}_{[2]}^{(l)} = [\sigma_{[2]ij}^{(l)}]$ dla $i \leq j = 1, \dots, m$; $l = 0, 1$, równania normalne mają następującą strukturę:

Dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{[1]} & 0 \\ 0 & c_{[1]} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{\frac{m(m+1)}{2}} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{[1]}^{(0)} \\ \boldsymbol{\sigma}_{[1]}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{[1]}^{(0)} \\ \mathbf{r}_{[1]}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Dla modelu z określoną strukturą wektora średnich:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{[2]} & b_{[2]} \\ b_{[2]} & c_{[2]} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{\frac{m(m+1)}{2}} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{[2]}^{(0)} \\ \boldsymbol{\sigma}_{[2]}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{[2]}^{(0)} \\ \mathbf{r}_{[2]}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji - cd.

gdzie dla $i \leq j = 1, \dots, m$; $a_{[1]} = \text{tr}(\mathbf{M}_{[1]}(\mathbf{K}_{ij}^{(0)})^2)$, $c_{[1]} = \text{tr}(\mathbf{M}_{[1]}(\mathbf{K}_{ij}^{(1)})^2)$,
 $a_{[2]} = \text{tr}(\mathbf{M}_{[2]}(\mathbf{K}_{ij}^{(0)})^2)$, $b_{[2]} = \text{tr}(\mathbf{M}_{[2]}\mathbf{K}_{ij}^{(0)}\mathbf{K}_{ij}^{(1)})$ oraz $c_{[2]} = \text{tr}(\mathbf{M}_{[2]}(\mathbf{K}_{ij}^{(1)})^2)$,
natomiast $\mathbf{r}_{[1]}^{(l)} = \frac{1}{2-\delta_{ij}}[r'_{[1]}\mathbf{K}_{ij}^{(l)}r_{[1]}]$, $\mathbf{r}_{[2]}^{(l)} = \frac{1}{2-\delta_{ij}}[r'_{[2]}\mathbf{K}_{ij}^{(l)}r_{[2]}]$ dla $l = 0, 1$ są
 $\frac{m(m+1)}{2} \times 1$ wektorami, δ_{ij} jest deltą Kroneckera oraz \mathbf{r} oznacza wektor resz-
duów, a zatem $\mathbf{r} = \mathbf{M}\mathbf{y} = (\mathbf{I}_{num} - \mathbf{P})\mathbf{y}$.

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji - cd.

Definiując macierze $\mathbf{C}_{[1]0}$ oraz $\mathbf{C}_{[1]1}$ dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich następująco:

$$\mathbf{C}_{[1]0} = \sum_{s=1}^u \sum_{r=1}^n \left(\mathbf{y}_{r,s} - \bar{\mathbf{y}}_{\bullet s} \right) \left(\mathbf{y}_{r,s} - \bar{\mathbf{y}}_{\bullet s} \right)',$$

$$\mathbf{C}_{[1]1} = \sum_{s=1}^u \sum_{\substack{s^*=1 \\ s \neq s^*}}^u \sum_{r=1}^n \left(\mathbf{y}_{r,s} - \bar{\mathbf{y}}_{\bullet s} \right) \left(\mathbf{y}_{r,s^*} - \bar{\mathbf{y}}_{\bullet s^*} \right)',$$

gdzie $\bar{\mathbf{y}}_{\bullet s} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \mathbf{y}_{r,s}$.

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji - cd.

Definiując macierze $\mathbf{C}_{[2]0}$ oraz $\mathbf{C}_{[2]1}$ dla modelu z określoną strukturą wektora średnich następująco:

$$\mathbf{C}_{[2]0} = \sum_{s=1}^u \sum_{r=1}^n \left(\mathbf{y}_{r,s} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[2]} \right) \left(\mathbf{y}_{r,s} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[2]} \right)',$$

$$\mathbf{C}_{[2]1} = \sum_{s=1}^u \sum_{\substack{s^*=1 \\ s \neq s^*}}^u \sum_{r=1}^n \left(\mathbf{y}_{r,s} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[2]} \right) \left(\mathbf{y}_{r,s^*} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[2]} \right)'.$$

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji - cd.

Prawe strony równań (1) i (2) mogą być wyrażone za pomocą $\mathbf{C}_{[1]0}$, $\mathbf{C}_{[1]1}$ oraz $\mathbf{C}_{[2]0}$, $\mathbf{C}_{[2]1}$ i wtedy otrzymujemy:

Dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{[1]} & 0 \\ 0 & c_{[1]} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_m \right) \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{[1]0} \\ \mathbf{\Gamma}_{[1]1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{[1]0} \\ \mathbf{C}_{[1]1} \end{bmatrix}.$$

Dla modelu z określoną strukturą wektora średnich:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{[2]} & b_{[2]} \\ b_{[2]} & c_{[2]} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_m \right) \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{[2]0} \\ \mathbf{\Gamma}_{[2]1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{[2]0} \\ \mathbf{C}_{[2]1} \end{bmatrix}.$$

3.7. BQUE dla parametrów macierzy kowariancji - cd.

Rozwiązując te równania otrzymujemy następujące estymatory dla Γ_0 i Γ_1 :

Dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{[1]0} &= \frac{1}{(n-1)u} \mathbf{C}_{[1]0}, \\ \tilde{\Gamma}_{[1]1} &= \frac{1}{(n-1)u(u-1)} \mathbf{C}_{[1]1}.\end{aligned}$$

Dla modelu z określoną strukturą wektora średnich:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{[2]0} &= \frac{(n-1)u+1}{(n-1)nu^2} \mathbf{C}_{[2]0} + \frac{1}{(n-1)nu^2} \mathbf{C}_{[2]1}, \\ \tilde{\Gamma}_{[2]1} &= \frac{1}{(n-1)nu^2} \mathbf{C}_{[2]0} + \frac{nu-1}{(n-1)n(u-1)u^2} \mathbf{C}_{[2]1}.\end{aligned}$$

Twierdzenie. *W przypadku obu modeli estymatory $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Gamma}$ są zgodne. Co więcej, rodzina rozkładów tych estymatorów jest zupełna.*

3.8. Porównanie BUE w obu modelach

Ponieważ $R(\mathbf{P}_{[2]}) \subset R(\mathbf{P}_{[1]})$ więc macierze $\mathbf{P}_{[1]}\mathbf{P}_{[2]} = \mathbf{P}_{[2]}\mathbf{P}_{[1]} = \mathbf{P}_{[2]}$. To oznacza, że $\mathbf{M}_{[1]}\mathbf{M}_{[2]} = \mathbf{M}_{[2]}\mathbf{M}_{[1]} = \mathbf{M}_{[1]}$. Wartości oczekiwane $\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(0)}$ oraz $\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(1)}$ wyznaczone dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich (Mo1) są nieobciążone przy prawdziwości modelu z określoną strukturą wektora średnich (Mo2). Zatem **sensownym jest porównanie wariancji estymatorów przy założeniu prawdziwości Mo2.**

3.8. Porównanie BUE w obu modelach - cd.

Można pokazać, że różnice wariancji estymatorów dla obu modeli spełniają nierówności:

$$\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(0)}) - \text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(0)}) < 0,$$

$$\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(1)}) - \text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(1)}) < 0.$$

Co oznacza, że:

$$\frac{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(0)})}{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(0)})} < 1,$$

$$\frac{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(1)})}{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(1)})} < 1.$$

3.8. Porównanie BUE w obu modelach - cd.

Rozważając szczególny przypadek, w którym $\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{I}$ oraz $\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{0}$, co oznacza, że $\mathbf{V} = \mathbf{I}$, dostajemy:

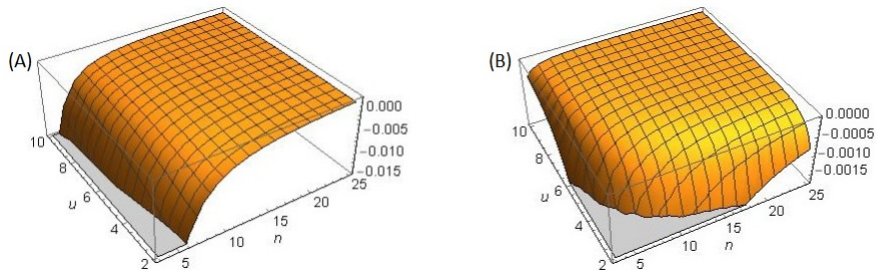
$$\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(0)}) - \text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(0)}) = -\frac{2(u-1)}{(n-1)nu^2},$$

$$\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(1)}) - \text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(1)}) = -\frac{2}{(n-1)n(u-1)u^2}.$$

$$\frac{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(0)})}{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(0)})} = 1 - \frac{u-1}{nu},$$

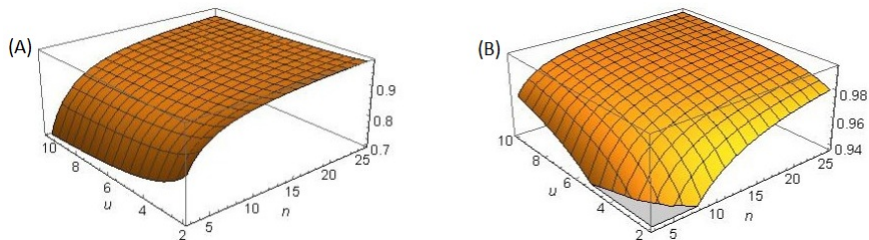
$$\frac{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(1)})}{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(1)})} = 1 - \frac{1}{nu}.$$

3.8. Porównanie BUE w obu modelach - cd.



Rys. 1. Różnica $var(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(0)}) - var(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(0)})$ dla $\tilde{\Gamma}_0$ (A) i różnica $var(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(1)}) - var(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(1)})$ dla $\tilde{\Gamma}_1$ (B).

3.8. Porównanie BUE w obu modelach - cd.



Rys. 2. Iloraz $\frac{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(0)})}{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(0)})}$ dla $\tilde{\Gamma}_0$ (A) i iloraz $\frac{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[2]ij}^{(1)})}{\text{var}(\tilde{\sigma}_{[1]ij}^{(1)})}$ dla $\tilde{\Gamma}_1$ (B).

3.9. Przykład z wykorzystaniem rzeczywistych danych

Dane zostały zaczerpnięte z książki Johnsona i Wicherna (2007, s. 43). Analizowanych było 25 pacjentów z osteoporozą. Badacz mierzył zawartość minerałów w kościach za pomocą absorpcjometrii fotonowej w celu zbadania czy suplementy diety spowalniają utratę masy kostnej u 25 kobiet w podeszłym wieku.

Zawartość minerałów w kościach była mierzona u każdej z kobiet w trzech różnych anatomicznie miejscach ciała ($m = 3$): kości promieniowej, ramiennej i łokciowej jak również po stronie dominującej i niedominującej ($u = 2$).

Wykorzystując test ilorazu największej wiarygodności ustalono, że na poziomie istotności 5% nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej, że struktura kowariancji ma postać blokowo-symetryczną (p -value = 0.5786).

3.9. Przykład z wykorzystaniem rzeczywistych danych - cd.

Nieobciążony estymator wektora średnich w modelu z dowolną jego strukturą jest postaci:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[1]} = \begin{bmatrix} 0.84380 & 1.79268 & 0.70440 & 0.81832 & 1.73484 & 0.69384 \end{bmatrix}.$$

Na bazie otrzymanych wartości można zauważyć, że wektor średnich dla trzech zmiennych odnoszących się do kości promieniowej, ramiennej i łokciowej jest bardzo zbliżony zarówno dla dominującej, jak i niedominującej strony; a zatem, $\mathbf{1}_u \otimes \boldsymbol{\mu}$ może być sensownym założeniem struktury wektora średnich. Innymi słowy, wartości w wektorze średnich $\boldsymbol{\mu}$ pozostają takie same pomiędzy dominującą i niedominującą stroną. Nieobciążony estymator wektora średnich w modelu z określoną jego strukturą jest postaci:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{[2]} = \begin{bmatrix} 0.83106 & 1.76376 & 0.69912 \end{bmatrix}.$$

3.9. Przykład z wykorzystaniem rzeczywistych danych - cd.

Nieobciążone estymatory macierzy $\mathbf{\Gamma}_0$ oraz $\mathbf{\Gamma}_1$ w modelu z dowolną strukturą wektora średnich są postaci:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{[1]0} = \begin{bmatrix} 0.01221 & 0.02172 & 0.00901 \\ 0.02172 & 0.07492 & 0.01682 \\ 0.00901 & 0.01682 & 0.01108 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{[1]1} = \begin{bmatrix} 0.01038 & 0.01931 & 0.00824 \\ 0.01931 & 0.06678 & 0.01529 \\ 0.00824 & 0.01529 & 0.00807 \end{bmatrix}.$$

3.9. Przykład z wykorzystaniem rzeczywistych danych - cd.

Nieobciążone estymatory macierzy $\mathbf{\Gamma}_0$ oraz $\mathbf{\Gamma}_1$ w modelu z określoną strukturą wektora średnich są postaci:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{[2]0} = \begin{bmatrix} 0.01234 & 0.02204 & 0.00907 \\ 0.02204 & 0.07559 & 0.01694 \\ 0.00907 & 0.01694 & 0.01105 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{[2]1} = \begin{bmatrix} 0.01025 & 0.01899 & 0.00819 \\ 0.01899 & 0.06610 & 0.01517 \\ 0.00819 & 0.01517 & 0.00810 \end{bmatrix}.$$

3.9. Przykład z wykorzystaniem rzeczywistych danych - cd.

Wartość sumy kwadratów reszt dla modelu z dowolną strukturą wektora średnich wynosi: $SSr_{[1]} = 4.7142896$, a w przypadku modelu z określoną strukturą wektora średnich wartość tej sumy jest równa: $SSr_{[2]} = 4.7656172$. Zatem stosunek sum kwadratów reszt w obu modelach to:

$$\frac{SSr_{[1]}}{SSr_{[2]}} = 0.9892296,$$

co oznacza, że model z określoną strukturą wektora średnich wyjaśnia niemalże 99% modelu z dowolną strukturą wektora średnich.

References

- [1] Arnold, S.F. 1979. Linear models with exchangeably distributed errors. *Journal of the American Statistical Association*. 74, 194-199.
- [2] Drygas, H., 1970. *The Coordinate-Free Approach to Gauss-Markov Estimation*, Berlin, Heidelberg: Springer.

- [3] Gnot, S., Klonecki, W. and Zmyślony, R. 1976. Uniformly minimum variance unbiased estimation in Euclidean vector spaces, Bull. de l'Academie Polon. des Sciences XXIV 4, 281-286.
- [4] Gnot, S., Klonecki, W. and Zmyślony, R. 1977a. Uniformly minimum variance unbiased estimation in various classes of estimators. Statistics 8(2), 199-210.
- [5] Gnot, S., Klonecki, W. and Zmyślony, R. 1977b. Best linear plus quadratic unbiased estimation of parameters in mixed linear models, Applicationes Mathematicae XV 4, 455-462.
- [6] Gnot, S., Klonecki, W. and Zmyślony, R. 1977c. Uniformly minimum variance unbiased estimation in various classes of estimators, Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics 8 2, 199-210.

- [7] Gnot, S., Klonecki, W. and Zmyślony, R. 1980. Best unbiased estimation: a coordinate free-approach. *Probability and Statistics*, 1(1), 1-13.
- [8] Jordan, P., Neumann, von, J. and Wigner, E., 1934. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *The Annals of Mathematics*, 35(1), 29-64.
- [9] Kruskal, W., 1968. When are Gauss-Markov and Least Squares Estimators Identical? A Coordinate-Free Approach. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(1), pp.70-75.
- [10] Lehmann, E.L. and Casella, G., 1998. *Theory of Point Estimation* Second Edition, Springer.
- [11] Leiva, R. 2007. Linear discrimination with equicorrelated training vectors. *Journal of multivariate analysis*. 98, 384-409.

- [12] Roy, A. and Leiva, R. 2008. Likelihood ratio tests for triply multivariate data with structured correlation on spatial repeated measurements. *Statistics & Probability Letters*, 78(13), 1971-1980.
- [13] Roy, A., Zmysłony, R., Fonseca, M. and Leiva, R. 2016. Optimal estimation for doubly multivariate data in blocked compound symmetric covariance structure, *Journal of Multivariate Analysis*, 144, 81-90.
- [14] Seely, J.F., 1971. Quadratic subspaces and completeness. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(2), 710-721.
- [15] Seely, J.F., 1972. Completeness for a family of multivariate normal distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43, 1644-1647.

- [16] Seely, J.F., 1977. Minimal sufficient statistics and completeness for multivariate normal families. *Sankhya (Statistics). The Indian Journal of Statistics. Series A*, 39(2), 170-185.
- [17] Zmyślony, R. 1976. On estimation of parameters in linear models, *Aplicaciones Mathematicae XV* 3(1976), 271-276.
- [18] Zmyślony, R. 1978. A characterization of best linear unbiased estimators in the general linear model, *Lecture Notes in Statistics*, 2, 365-373.
- [19] Zmyślony, R. 1980. Completeness for a family of normal distributions, *Mathematical Statistics, Banach Center Publications* 6, 355-357.