

Mieczysław Gruda, Włodzimierz Rembisz  
IERiGŻ – PIB, Warszawa  
E-mail: grudam@op.pl, rembisz@ierigz.waw.pl

## Istnienie ogólnej ekonomicznej równowagi konkurencyjnej: podejście wariacyjne Existence of General Economic Competitive Equilibrium: A Variation Approach

*Słowa kluczowe:* równowaga konkurencyjna, równowaga ogólna, prawo Walrasa, metody wariacyjne, rachunek wariacyjny w ekonomii.

### Wstęp

Praca ta stanowi badanie istnienia ogólnej konkurencyjnej równowagi w gospodarkach z czynnikami i produktami o skończonej wielkości. W analizie pokazujemy, że istnieje równowaga Walrasa we wszystkich własnościach prywatnych gospodarek, tak że dla wszystkich konsumentów środki początkowe nie zawierają wolnych towarów i funkcji użytkowych lokalnie Lipschitz quasi-wklęsłych. Dowód na istnienie ogólnej równowagi konkurencyjnej opieramy na metodach wariacyjnych GQVI (General Quasi-Variational Inequalities), stosując teoretyczny wynik istnienia uogólnionych quasi wklęsłych nierówności.

### Istnienie problemu równowagi rynkowej

Równowaga od lat pozostaje niezmiennie w centrum zainteresowania ekonomistów zajmujących się matematyczną teorią rynku. Z jednej strony interesują nas warunki istnienia równowagi (rynkowej, ogólnej), przez które rozumie się układ cen, przy którym producenci dostarczają na rynek dokładnie takie ilości towarów, jakie są niezbędne do zaspokojenia efektywnego popytu konsumpcyjnego.

Z drugiej strony ważny jest sam proces dochodzenia do równowagi oraz to, jak ceny zachowują się, gdy rynek zostanie wytracony. Stąd też liczne modele równowagi oraz stabilności rynku, które stanowią dochodzenie do wyjaśnienia zachowań zjawisk rynkowych w gospodarce.

**Równowaga konkurencyjna** — dany jest prywatny układ gospodarczy, w którym  $X_i$  jest zbiorem konsumentów,  $\succsim_i$  — relacje preferencji,  $Y_j$  — zbiór producentów,  $\omega_i$  — wektor czynników produkcji oraz macierz udziałów własnościowych [4]. Alokacja  $(x^*, y^*)$  oraz wektor cen  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  jest równowagą konkurencyjną (Walrasowską), jeżeli:

1. Dla każdego  $j$   $y_j^*$  maksymalizuje zyski producenta  $j$  na zbiorze produkcyjnym  $Y_j$  przy danych cenach  $p$ .
2. Dla każdego  $i$ ,  $x_i^*$  jest najlepszym dostępnym koszykiem dóbr  $p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \cdot y_j^*$ .
3.  $\sum_i x_i^* = \bar{\omega} + \sum_j y_j^*$  — alokacja jest możliwa do wyprodukowania przy danych zasobach (czynnikach).

### Metody wariacyjne w badaniu równowag

Intensywny rozwój nowożytnego rachunku wariacyjnego przypada na przełom XVII i XVIII wieku. Wystarczy wspomnieć wkład Fermata, Newtona, Leibniza czy Bernoullich, zaś jego dzisiejszy formalizm zawdzięczamy pracom Eulera, Lagrange'a, Legendre'a, Jacobiego, Weierstrassa, Clebscha, Mayera, Knesera, Bolzy czy Hilberta. To właśnie Euler studiując prace Lagrange'a nadał nazwę dziedzinie matematyki zwanej dzisiaj rachunkiem wariacyjnym. Historia rachunku wariacyjnego od XVII do XIX wieku została w sposób wyczerpujący omówiona w monografii Goldstine'a pod tytułem *A History of the Calculus of Variations*.

Problem wariacyjny GQVI — ogólnej quasi wariacyjnej nierówności rozwiązujemy najczęściej w następujący sposób [6]:

Problem wariacyjny polega na znalezieniu takiej trójki wielkości modelu ekonomicznego, dla którego  $p$  jest wektorem cen,  $x$  wektorem konsumpcji,  $y$  — wektorem produkcji a  $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ , z których wielkość należy  $\bar{x} \in M(\bar{p}, \bar{y})$  oraz, że istnieje taka wielkość  $T = (T_1, \dots, T_n) \in \prod_{i=1}^n \partial^o(-u_i)(\bar{x}_i)$  oraz

$$-\sum_{i=1}^n \langle T_i, x_i - \bar{x}_i \rangle + \sum_{j=1}^m \langle \bar{p}, y_j - \bar{y}_j \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - e_i) - \sum_{j=1}^m \langle \bar{y}_j p - \bar{p} \rangle \right\rangle \leq 0,$$

dla każdego  $(p, x, y) \in P \cdot M(\bar{p}, \bar{y}) \cdot Y$ . Niech  $K = \prod_{i=1}^n K_i$ , gdzie  $K_i$  spełnia warunek  $(-u_i)^o(x_i, i_h) < 0$  dla wszystkich  $x_i \in K_i$  spełniających relacje  $x_i^h = 0$ .

### Wybrane tezy Keynesa towarzyszące równowadze ogólnej

- Tylko spadek cen poszczególnych dóbr zwiększa ich popyt, spadek cen wszystkich dóbr nie zwiększa popytu.
- Możliwa jest równowaga przy bardzo różnym stopniu wykorzystania czynników produkcji (w szczególności przy różnym poziomie bezrobocia).
- Mechanizm rynkowy jest niedoskonały – samoczynnie nie jest w stanie zapewnić ani pełnego wykorzystania zdolności produkcyjnych ani pełnego zatrudnienia.
- Konieczne jest wspieranie mechanizmu rynkowego przez zwiększanie konsumpcji, inwestycji oraz wydatków rządowych (PKB=K+I+G).

### Podsumowanie

W pracy [5] przy założeniu wklęsłości określono funkcjonowanie popytu, a konkurencyjną równowagę ekonomiczną charakteryzuje się rozwiązaniem uogólnionych nierówności kwarcjalicznych lub zmiennych nierówności obejmujących odpowiednio mnożniki Lagrange'a. W opracowaniu tym osłabiliśmy założenia wklęsłości, wymagając tylko quasi concavity funkcji użytkowych. Ponadto kropka nie wymaga różnicy funkcji użytkowych, ale tylko lokalnego stanu Lipschitza.

Dowód istnienia równowagi ekonomicznej jest z pewnością uznawany za pierwszy główny problem, który należy rozwiązać w teorii ogólnej równowagi. W szczególności chodzi o zbadanie, jakie założenia dotyczące środowiska i mechanizmu mogą zagwarantować istnienie jednego państwa, w którym łączny popyt nie przekracza zagregowanej podaży dla wszystkich rynków po cenach endogenicznie określonych.

Literatura o regularnych gospodarkach podaje odpowiednie narzędzia matematyczne narzędzia, które pozwalają obliczyć lub tylko pozwala wykazać istnienie równowag. Na korzyść tej tezy przedstawiamy wyniki uzyskane przez twierdzenie o punkcie stałym Markowa–Kakutaniego oraz algorytm gradientu oraz technik znanych jako podejście różnicowe, ponieważ ciągłość, różnorodność i wklęsłość są gwarantowane dla funkcji użyteczności jak i relacji preferencji.

### Bibliografia

- [1] L. Walras. *Elements d'Economie Politique Pure*. Corbaz, Lausanne, Switzerland, 1874. Translated as: *Elements of Pure Economics*, Irwin, Chicago, Ill, USA, 1954.
- [2] K. J. Arrow, G. Debreu. *Existence of an equilibrium for a competitive economy*. *Econometrica* 22 (1954), 265–290. View at Publisher. View at Google Scholar View at MathSciNet.
- [3] G. Debreu. *Theory of Value*. John Wiley & Sons, New York, USA, 1959.
- [4] M. Gruda, W. Rembisz. *Istnienie optymalnych równowag konkurencyjnych w kontekście zależności między wzrostem gospodarczym i spójnością terytorialną*. XLIII KZM Zakopane, 2014.
- [5] A. Jofré, R. T. Rockafellar, R. J-B. Wets. *Variational Inequalities and Economic Equilibrium*. *Mathematics of Operations Research* 32 (2007), 32–50.
- [6] Z. Naniewicz. *Wariacyjne podejście do zagadnień równowagi ekonomicznej*. IMiI UW 2004.