Leszek Plaskota
Uniwersytet Warszawski, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
E-mail: leszekp@mimuw.edu.pl

Optymalna numeryczna aproksymacja funkcji kawałkami gładkich

Rozpatrujemy zadanie numerycznej aproksymacji funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ w normie L^p, $1 \leqslant p < \infty$, składających się z dwóch kawałków klasy C^r odseparowanych nieznanym punktem osobliwym s_f, przy czym na każdym z kawałków $f^{(r)}$ jest hölderowska z wykładnikiem ρ. Dozwolone aproksymacje korzystają jedynie z informacji o n zaburzonych wartościach funkcji $y_i = f(x_i) + e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, gdzie $|e_i| \leqslant \delta$.

Pokazujemy, że minimalny błąd pesymistyczny takiej aproksymacji jest proporcjonalny do $\max(\delta, n^{-(r+\rho)})$ w klasie funkcji o jednostajnie ograniczonych stałej Höldera i skokach nieciągłości $|f(s_f^+) - f(s_f^-)|$. Innymi słowy, aby osiągnąć błąd aproksymacji ε, potrzeba i wystarcza użyć $n = \Omega(\varepsilon^{-1/(r+\rho)})$ wartości funkcji z dokładnością $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Optymalny algorytm używa specjalnego mechanizmu pozwalającego aproksymować s_f z wystarczającą dokładnością, który korzysta z $\mathcal{O}(\ln n)$ adaptacyjnie wybranych punktów x_i. Użycie adaptacji, $p < +\infty$ i jednostajne ograniczenie stałej Höldera są istotne. Jednakże, jeśli zawęzimy klasę do funkcji globalnie ciągłych, tzn. gdy dodatkowo założymy, że $f(s_f^+) = f(s_f^-)$, to ten sam poziom błędu można otrzymać także dla $p = +\infty$ używając jedynie $(r-1)_+$ punktów adaptacyjnych.

Zanotujmy, że $\max(\delta, n^{-(r+\rho)})$ jest również optymalnym pesymistycznym błędem w klasie funkcji globalnie r-hölderowskich, przy czym optymalna aproksymacja nie używa adaptacji. Stąd wniosek, że dla $p < +\infty$ oraz dla $p \leqslant +\infty$ i $f \in C$ obecność osobliwości nie wpływa na jakość aproksymacji.

Prezentowane wyniki są efektem wspólnych prac z Pawłem Morkiszem (AGH Kraków), Grzegorzem Wasilkowskim (University of Kentucky) i Yaxi Zhao.

Bibliografia

[1] P. Morkisz, L. Plaskota. *Approximation of piecewise Hölder functions from inexact information.* J. Complexity 32 (2016), 122–136.
[2] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski. *Adaption allows efficient integration of functions with unknown singularities.* Numerische Math. 102 (2005), 123–144.
[3] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski. *Uniform approximation of piecewise r-smooth and globally continuous functions.* SIAM J. Numer. Anal. 47 (2009), 762–785.
[4] L. Plaskota, G. W. Wasilkowski, Y. Zhao. *The power of adaption for approximating functions with singularities.* Math. Comp. 77 (2008), 2309–2338.