

Mieczysław Gruda  
IERiGŻ-PIB, Warszawa  
E-mail: grudam.waw@gmail.com

## Wariacyjne podejście w problemach równowagi ekonomicznej Variational approach to the problems of economic equilibrium

Słowa kluczowe: równowaga konkurencyjna, równowaga ogólna, prawo Walrasa, metody wariacyjne, rachunek wariacyjny w ekonomii, nierówności wariacyjne

### Wstęp

Praca ta stanowi badanie istnienia ogólnej konkurencyjnej równowagi w gospodarce z czynnikami i produktami o skończonej wielkości. W analizie pokazujemy, że istnieje równowaga Walrasa we wszystkich własnościach prywatnych gospodarek, tak że dla wszystkich konsumentów środki początkowe nie zawierają wolnych towarów i funkcji użytkowych lokalnie Lipschitz quasi-wklęsłych. Dowód na istnienie ogólnej równowagi konkurencyjnej opieramy na metodach wariacyjnych GQVI (General Quasi-Variational Inequalities), stosując teoretyczny wynik istnienia uogólnionych quasi-wklęsłych nierówności w ujęciu wariacyjnym.

### Metody wariacyjne w badaniu równowag

Intensywny rozwój nowożytnego rachunku wariacyjnego przypada na przełom XVII i XVIII wieku. Wystarczy wspomnieć wkład Fermata, Newtona, Leibniza czy Bernoullich, zaś jego dzisiejszy formalizm zawdzięczamy pracom Eulera, Lagrange'a, Legendre'a, Jacobiego, Weierstrassa, Clebscha, Mayera, Knesera, Bolzy czy Hilberta. To właśnie Euler studiując prace Lagrange'a nadał nazwę dziedzinie matematyki zwanej dzisiaj *rachunkiem wariacyjnym*. Historia rachunku wariacyjnego od XVII do XIX wieku została w sposób wyczerpujący omówiona w monografii Goldstine'a pod tytułem *A History of the Calculus of Variations*. Problem wariacyjny GQVI — ogólnej quasi-wariacyjnej nierówności — rozwiązujemy najczęściej w następujący sposób [5]:

Problem wariacyjny polega na znalezieniu takiej trójki  $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ , wielkości modelu ekonomicznego równowagi (M), dla którego  $p$  jest wektorem cen,  $x$  — wektorem konsumpcji,  $y$  — wektorem produkcji, a  $(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ , z których wielkość  $\bar{x}$  należy do  $M(\bar{p}, \bar{y})$ . Istnieje taka wielkość czasowa  $T = (T_1, \dots, T_n) \in \prod_{i=1}^n \partial^0(-u_i)(\bar{x}_i)$  ( $u_i$  — funkcja użyteczności) przy spełnieniu warunku

$$-\sum_{i=1}^n \langle T_i, x_i - \bar{x}_i \rangle + \sum_{j=1}^m \langle \bar{p}, y_j - \bar{y}_j \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - e_i) - \sum_{j=1}^m \langle \bar{y}_j, p - \bar{p} \rangle \right\rangle \leq 0$$

dla każdego  $(p, x, y) \in P \cdot M(\bar{p}, \bar{y}) \cdot Y$ .

Przy czym  $K = \prod_{i=1}^n K_i$ , gdzie  $K_i$  spełnia warunek  $(-u_i)^0(x_i, i_h) < 0$  dla wszystkich  $x_i \in K_i$  spełniających relacje  $x_i^h = 0$ .

### Podsumowanie

W pracy [4] przy założeniu wklęsłości określono funkcjonowanie popytu, a konkurencyjną równowagę ekonomiczną charakteryzuje się rozwiązaniem uogólnionych nierówności kwadratowo-analitycznych lub zmiennych nierówności obejmujących odpo-

wiednie mnożniki Lagrange’a. W opracowaniu tym osłabiliśmy założenia wklęsłości, wymagając tylko quasi-concavity funkcji użytkowych. Ponadto „dot” (graph description language) nie wymaga badania różnicy funkcji użytkowych, ale tylko lokalnego stanu Lipschitza.

Dowód istnienia równowagi ekonomicznej jest z pewnością uznawany za pierwszy główny problem, który należy rozwiązać w teorii ogólnej równowagi. W szczególności chodzi o zbadanie, jakie założenia dotyczące środowiska i mechanizmu mogą zagwarantować istnienie jednego państwa, w którym łączny popyt nie przekracza zagwarantowanej podaży dla wszystkich rynków po cenach endogenicznie określonych.

Literatura o regularnych gospodarkach podaje odpowiednie narzędzia matematyczne, które pozwalają obliczyć lub tylko pozwalają wykazać istnienie cząstkowych lub ogólnych równowag. Na korzyść tej tezy przedstawiamy wyniki uzyskane przez twierdzenie o punkcie stałym Markowa–Kakutaniego mówiące o istnieniu wspólnego punktu stałego dla półgrupy ciągłych operatorów afinicznych określonych na wypukłym, zwartym podzbiorniku przestrzeni lokalnie wypukłej. Zastosowany też został algorytm gradientu, technik znanych jako podejście różnicowe, ponieważ ciągłość, różnorodność i wklęsłość są zagwarantowane dla funkcji użyteczności jak i relacji preferencji.

### Bibliografia

- [1] L. Walras, *Elements d’Economie Politique Pure*, Corbaz, Lausanne, Switzerland, 1874; translated as: *Elements of Pure Economics*, Irwin, Chicago, Ill, USA, 1954.
- [2] K. J. Arrow, G. Debreu, *Existence of an equilibrium for a competitive economy*, *Econometrica* 22 (1954), 265–290.
- [3] M. Gruda, W. Rembisz, *Istnienie optymalnych równowag konkurencyjnych w kontekście zależności między wzrostem gospodarczym i spójnością terytorialną*, XLIII KZM Zakopane, 2014.
- [4] A. Jofré, R. T. Rockafellar, R. J-B. Wets, *Variational Inequalities and Economic Equilibrium*, *Mathematics of Operations Research* 32 (2007), 32–50.
- [5] Z. Naniewicz, *Wariacyjne podejście do zagadnień równowagi ekonomicznej*, IMiI UW 2004.