Andrzej Makagon
Department of Mathematics, Hampton University, USA

Konstrukcja modelu PARMA z periodogramu

Ciąg zespolonych zmiennych losowych $X(n)$, $n \in Z$, o średniej zero i skończonej wariancji nazywamy *okresowo skorelowanym o okresie* T, jeśli dla każdego $m, n \in Z$, $EX(m+T)\overline{X(n+T)} = EX(m)\overline{X(n)}$. Zdefiniujmy

$$a_j(n) := \sum_{r=0}^{T-1} e^{-ijr(2\pi/T)} R_x(n+r,r), \quad j = 0, \ldots, T-1.$$

Spectrum ciągu okresowo skorelowanego o okresie T to wektorowa miara $\gamma(dt) = (\gamma^0(dt), \ldots, \gamma^{T-1}(dt))$ zdefiniowana na odcinku $[0, 2\pi)$ taka, że

$$a_j(n) = \int_0^{2\pi} e^{-itn} \gamma^j(dt), \quad n \in Z.$$

Mówimy, że ciąg okresowo skorelowany $(X(n))$ ma wymierną gęstość, jeśli istnieje wymierna funkcja zmiennej zespolonej $g(z) = (g^0(z), \ldots, g^{T-1}(z))$ taka, że $\gamma(dt) = g(e^{it})\, dt$, $t \in [0, 2\pi)$.

PARMA system o okresie T jest to nieskończony system równań różnicowych w postaci

$$X(n) = -\sum_{j=1}^{l} a_j(n) X(n-j) + \sum_{j=0}^{r} b_j(n) \xi_{n-j}, \quad n \in Z, \tag{1}$$

gdzie $a_j(n), b_j(n)$ są T-okresowymi zespolonymi ciągami zmiennej n, a ciąg (ξ_n) jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o średniej zero i jednostkowej wariancji. PARMA system nazywamy *PARMA reprezentacją* ciągu $(X(n))$, jeśli dla każdego $n \in Z$

$$\overline{\mathrm{sp}}\{X(m) : m \leqslant n\} = \overline{\mathrm{sp}}\{\xi_m : m \leqslant n\}.$$

Tylko ciągi z wymiernymi gęstościami mają PARMA reprezentację [1]. PARMA reprezentacja nie jest jednoznaczna. Jeśli (1) jest PARMA reprezentacją ciągu $(X(n))$, to żeby otrzymać najlepszą liniową prognozę zmiennej $X(n)$, bazującą na „przeszłości” $\overline{\mathrm{sp}}\{X(m) : m \leqslant n\}$, wystarczy w równaniu (1) podstawić $b_0(n) = 0$. W konsekwencji praktyczne zagadnienie prognozy szeregu czasowego będzie rozwiązane, jeśli będziemy umieli znaleźć (aproksymować) jakąś PARMA reprezentację obserwowanego ciągu.

Związki między ciągami okresowo skorelowanymi o wymiernych gęstościach i systemami PARMA były treścią mojej prezentacji na XLV Konferencji Zastosowań Matematyki (wrzesień 2016) i są opublikowane w pracy [1]. Uzyskane w niej wyniki prowadzą do jawnych procedur, które między innymi mogą być użyte do obliczenia gęstości spektralnej okresowo skorelowanego rozwiązania systemu PARMA lub do konstrukcji PARMA reprezentacji okresowo skorelowanego ciągu znając jego wymierną gęstość spektralną [2].

W tym referacie postaram się przekonać słuchaczy, że istnieje możliwość użycia tych procedur do konstrukcji modelu PARMA dla danego szeregu czasowego. Konstrukcja wykorzystuje analizę kształtu przesuniętego periodogramu (jest to popularny estymator gęstości spektralnej).

Literatura

[1] A. Makagon, *Periodically Correlated Sequences with Rational Spectra and PARMA Systems*, [w:] Cyclostationarity: Theory and Methods III, red. F. Chaari i in., Contributions to the 9th Workshop on Cyclostationary Systems and Their Applications, Grodek, Poland, 2016, Applied Condition Monitoring, Springer 2017, 151–172.

[2] A. Makagon, *Tools for Analysis of PARMA Systems* (w przygotowaniu).