Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 13.05.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej Adama Tyca

Zigzag structure in triangulations of surfaces

Zanurzenia grafów w powierzchnie to ekscytująca tematyka z pogranicza kombinatoryki i topologii. Praca doktorska Adama Tyca koncentruje się na pewnych specjalnych ciągach krawędzi zanurzonego grafu, zwanych *zygzakami*. Ciągi tego typu uzyskujemy w wyniku *spaceru* po zanurzonym grafie, w którym każde dwie kolejne krawędzie leżą w tej samej ścianie, ale następna krawędź jest już na innej ścianie i jest rozłączna z przedostatnią. Pojęcie to zostało wprowadzone w kontekście zastosowań teorii grafów w chemii (*fulereny*). Nawiązuje ono również do *wielokątów Petriego*, a także do *grafów Eulerowskich* i *kodów Gaussa*.

Zgodnie z tytułem, rozprawa Adama Tyca bada strukturę zygzaków w *triangulacjach* na dowolnych powierzchniach. Zawiera ona szereg ciekawych rezultatów stanowiących znaczący postęp w tej tematyce. Omówię pokrótce kilka z nich stosując gdzieniegdzie pewne uproszczenia terminologiczne.

Niech G będzie grafem zanurzonym w powierzchnię (sferę, torus, butelkę Kleina, etc.). Zdarza się, że zygzak w G przechodzi po wszystkich krawędziach, wówczas G nazywamy grafem *z-zawiązanym*. Narzuca się naturalne pytanie o charakteryzację takich grafów. We wspólnej pracy z Markiem Pankovem, autor rozprawy podaje taką charakteryzację dla przypadku triangulacji, przy użyciu pojęcia *z-monodromii* ścian (Twierdzenie 3). Owa monodromia ściany trójkątnej F to po prostu funkcja, która przypisuje krawędzi skierowanej e z F tę krawędź z F, która pojawi się jako pierwsza w dalszym obiegu zygzaka wyznaczonego przez parę (e, f), gdzie f jest kolejną krawędzią w jednej z dwóch cyklicznych orientacji F. Okazuje się (Twierdzenie 2), że istnieje siedem typów z-mondromii ścian, z których cztery odpowiadają triangulacjom z-zawiązanym (Twierdzenie 3). Kolejny ciekawy wynik (Twierdzenie 4) mówi, że każdą triangulację na dowolnej powierzchni (spójnej i zamkniętej) można "rozdrobnić" do triangulacji z-zawiązanej, gdzie przez *rozdrobnienie* rozumie się wklejenie w niektóre ściany odpowiednich triangulacji dysku. Dowody wymienionych wyników są niebanalne, bazują na pomysłowej analizie kombinatorycznych i topologicznych własności różnorakich obiektów opisujących strukturę zygzaków. W szczególności, dowód twierdzenia o rozdrobnieniu podaje efektywną metodę jego konstrukcji. Praca z tymi wynikami ukazała się w *Discrete and Computational Geometry*. Zawiera ona ponadto znacznie uproszczony dowód wcześniejszego twierdzenia autorów (Twierdzenie 5), opublikowanego w *European Journal of Combinatorics*, mówiącego o tym kiedy suma spójna dwóch triangulacji z-zawiązanych pozostaje z-zawiązana.

Kolejny ciekawy wątek w pracy Adama Tyca łączy zygzaki w triangulacjach z zanurzeniami grafów Eulerowskich skierowanych. W takim zanurzeniu, oprócz podstawowego warunku niekrzyżowania się krawędzi, wymaga się aby cykle ograniczające ściany były skierowane. Dla danej triangulacji G możemy utworzyć jej *z-orientację* poprzez wybór pełnej reprezentacji rodziny zygzaków (z dokładnością od odwrócenia zygzaka). Każda krawędź pojawia się w tej reprezentacji dokładnie dwa razy — albo w dwóch przeciwnych kierunkach (typ I), albo w tym samym kierunku (typ II). Krawędzie typu II tworzą więc podgraf zorientowany D w triangulacji G. Autor definiuje pojęcie triangulacji *z-jednorodnej* (ze względu na typy ścian, które zależą od typów krawędzi), a następnie dowodzi zaskakującego twierdzenia (Twierdzenie 6 i Propozycja 5). Mówi ono, że w przypadku triangulacji z-jednorodnej, podgraf D jest zanurzonym grafem Eulerowskim i na odwrót, każde zanurzenie grafu Eulerowskiego skierowanego można uzupełnić do triangulacji z-jednorodnej, w której odgrywa on rolę podgrafu D. Dodatkowo, autor scharakteryzował (Twierdzenie 7) składowe spójności powierzchni powstające po usunięciu z niej grafu D. Są to otwarty dysk, otwarta wstęga Möbiusa lub otwarty walec. Te ładne wyniki ukazały się w pracy Adama Tyca opublikowanej w *Ars Mathematica Contemporanea*.

Inne ciekawe twierdzenie (Twierdzenie 8) elegancko łączy pojęcie jednorodności z pojęciem zawiązania triangulacji. Autor podaje w nim algorytm przekształcający triangulację z-jednorodną w triangulację z-zawiązaną zachowującą własność jednorodności. Dodatkowo, autor (wspólnie z Markiem Pankovem) uzyskuje szereg ciekawych informacji o owych monodromiach. Na przykład, Twierdzenie 9 orzeka, że wierzchołki grafu dualnego do wyjściowej triangulacji odpowiadające ścianom o monodromiach typu 1 i 2 zawsze indukują *lasy* (czyli grafy bez cykli). Dowody tych twierdzeń są dość trudne technicznie, wymagają szczegółowej analizy różnorakich własności z-monodromii w powiązaniu z wieloma pojęciami pomocniczymi. Wyniki te ukazały się w dwóch pracach w *Discrete Mathematics*.

Rozprawa jest dość dobrze zredagowana, zawiera sporo przykładów i rysunków dobrze ilustrujących niełatwą miejscami materię. Drobne niedoskonałości (na przykład w definicji pojęcia zygzaka) nie wpływają znacząco na przyjemność lektury. Lekki niedosyt pozostawia całkowity brak problemów otwartych, których nie znalazłem także w publikacjach autora.

Podsumowując stwierdzam, że praca Adama Tyca to bardzo dobry doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących ciekawej tematyki zygzaków w triangulacjach. Ich uzyskanie świadczy o świetnym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej intuicji i erudycji autora. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Adama Tyca do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk