Streszczenie pracy doktorskiej Jacka Krajczoka

Praca doktorska zatytułowana "Własności modularne lokalnie zwartych grup kwantowych" dotyczy pewnych aspektów teorii lokalnie zwartych grup kwantowych. Obiekty takie stanowią uogólnienie grup topologicznych które są lokalnie zwarte[1]. Jedną z motywacji ku ich wprowadzeniu była chęć rozszerzenia dualności Pontryagina: jeśli G jest abelową grupą lokalnie zwartą, to zbiór $\widehat{G}$ (mocno ciągłych) reprezentacji nieprzywiedlnych ma strukturę abelowej grupy lokalnie zwartej. Wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje G są jednowymiarowe, a zatem możemy zadać działanie grupowe na $\widehat{G}$ poprzez $(\chi\eta)(g) = \chi(g)\eta(g)$ $(\chi, \eta \in \widehat{G}, g \in G)$. Tak powstała grupa $\widehat{G}$ nazywana jest grupą dualną do G w sensie Pontryagina. Konstrukcję tę możemy powtórzyć dla $\widehat{G}$ – wówczas wrócimy do grupy wyjściowej. Mówiąc precyzyjniej, grupa $\widehat{\widehat{G}}$ jest izomorficzna z G, gdzie $g \in G$ odpowiada reprezentacji $\widehat{G}$ danej poprzez $\widehat{G} \ni \chi \mapsto \chi(g) \in \mathbb{T}$. Najbardziej znanymi przykładami grup dualnych w sensie Pontryagina są $\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$ oraz $\widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}$.

W pracy stosujemy definicję lokalnie zwartej grupy kwantowej $\mathbb{G}$ pochodzącą od Kustermansa i Vaesa [4]. Zgodnie z nią, każda lokalnie zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}$ opisana jest za pomocą (potencjalnie nieprzemiennej) algebry von Neumanna $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ zwanej algebrą funkcji ograniczonych na $\mathbb{G}$, komnożenia $\Delta\colon \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) \bar{\otimes} \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ oraz lewej i prawej całki Haara φ, ψ – są to wagi na $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$. Szczególną klasę lokalnie zwartych grup kwantowych tworzą zwarte lub dyskretne grupy kwantowe – ich definicję wprowadził Woronowicz w [7, 5]. Dualność Pontryagina rozszerza się do klasy lokalnie zwartych grup kwantowych: z każdą taką grupą $\mathbb{G}$ możemy związać kwantową grupę dualną $\widehat{\mathbb{G}}$, natomiast $\widehat{\widehat{\mathbb{G}}}$ jest kanonicznie izomorficzna z $\mathbb{G}$. Podobnie jak w klasycznej teorii, $\mathbb{G}$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{\mathbb{G}}$ jest dyskretna. Co więcej, obiekty te w istocie rozszerzają pojęcie lokalnie zwartych grup: klasyczną grupę G możemy traktować jako kwantową grupę lokalnie zwartą w następujący sposób: jej algebra von Neumanna funkcji ogranicznych to $\mathrm{L}^\infty(G)$, przemienna algebra (klas równoważności) mierzalnych, ograniczonych funkcji, komnożenie Δ to odwzorowanie dualne do mnożenia, natomiast wagi φ, ψ dane są przez całkowanie względem miar Haara. Grupa dualna $\widehat{G}$ związana jest z algebrami operatorów badanymi w abstrakcyjnej analizie harmonicznej: grupowymi C^*-algebrami $\mathrm{C}^*_r(G), \mathrm{C}^*(G)$ oraz grupową algebrą von Neumanna $\mathrm{L}(G)$.

Niezwykle interesującym fenomenem, który pojawia się w teorii grup kwantowych jest nieśladowość całek Haara; oznaczmy symbolem h całkę Haara na $\mathrm{SU}_q(2)$ $(0 < q < 1)$, zwartej grupie kwantowej wprowadzonej przez Woronowicza w [6]. Możemy znaleźć takie elementy $a, b \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{SU}_q(2))$, dla których $h(ab) \neq h(ba)$. Nieśladowość całek Haara jest

[1] Będziemy stosowali konwencję, w której przestrzenie lokalnie zwarte są również Hausdorffa.

źródłem wielu interesujących problemów i zjawisk, które są w sercu tej rozprawy. Korzystając z teorii Tomity–Takesakiego możemy skonstruować grupy automorfizmów modularnych $(\sigma_t^{\varphi})_{t\in\mathbb{R}}, (\sigma_t^{\psi})_{t\in\mathbb{R}}$ związane z lewą φ oraz prawą ψ całką Haara. Poza tym, istnieje również trzecia grupa automorfizmów – grupa skalowania $(\tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Odwzorowania te działają na algebrze von Neumanna $\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{G})$. Tych grup automorfizmów nie widzimy (są trywialne) w przypadku grup klasycznych. Grupy automorfizmów modularnych obecne są jednak już w przypadku niektórych grup kwantowych dualnych do klasycznych. Jeśli G jest klasyczną grupą lokalnie zwartą to całka Haara $\widehat{\varphi}$ na $\widehat{G}$ jest śladowa (równoważnie: automorfizmy modularne $(\sigma_t^{\widehat{\varphi}})_{t\in\mathbb{R}}$ są trywialne) wtedy i tylko wtedy, gdy G jest unimodularna. Widzimy więc na tym przykładzie, że istnieje związek między unimodularnością grupy kwantowej, a śladowością całek Haara na kwantowej grupie dualnej. W ogólnym przypadku związek ten jest nieco bardziej skomplikowany i relacje tego typu są jednym z zagadnień, które badamy w pracy.

Istotna część pracy dotyczy klasy lokalnie zwartych grup kwantowych typu I. Są to grupy kwantowe których pełna grupowa C*-algebra (którą możemy identyfikować z uniwersalną wersją C*-algebry funkcji C_0 na dualnej grupie $\widehat{\mathbb{G}}$) jest typu I. Kluczowym rezultatem dotyczącym tych grup kwantowych jest twierdzenie Desmedta z [1], mówiące o istnieniu miary Plancherela oraz stowarzyszonych z nią obiektów. W szczególności, daje nam ono unitarny operator $\mathcal{Q}_L\colon\ \mathrm{L}^2(\mathbb{G}) \to \int_{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}^{\oplus} \mathrm{HS}(\mathsf{H}_\pi)\,\mathrm{d}\mu(\pi)$ (gdzie $\mathrm{L}^2(\mathbb{G})$ jest przestrzenią Hilberta pochodzącą z reprezentacji GNS dla φ, a $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ to przestrzeń nieprzywiedlnych reprezentacji $\mathbb{G}$), który przenosi algebrę von Neumanna $\mathrm{L}^{\infty}(\widehat{\mathbb{G}})$ na całkę prostą $\int_{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}^{\oplus} \mathrm{B}(\mathsf{H}_\pi)\otimes \mathbb{1}_{\overline{\mathsf{H}_\pi}}\,\mathrm{d}\mu(\pi)$. Operator $\mathcal{Q}_L$ pozwala również wyrazić lewą całkę Haara $\widehat{\varphi}$ na $\widehat{\mathbb{G}}$ przy pomocy mierzalnego pola ściśle dodatnich samosprzężonych operatorów $(D_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$ (analogiczny wynik mamy również dla prawej całki $\widehat{\psi}$ – dla niej pojawia się pole $(E_\pi)_{\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$). W pracy uzyskaliśmy wyrażenia pozwalające zapisać operatory związane kanonicznie z $\mathbb{G}$ oraz $\widehat{\mathbb{G}}$ na poziomie całek prostych, między innymi:

$$\nabla_{\widehat{\varphi}}^{it} = \mathcal{Q}_L^*\Big(\int_{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}^{\oplus} D_\pi^{-2it}\otimes (D_\pi^{2it})^{\top}\,\mathrm{d}\mu(\pi)\Big)\mathcal{Q}_L,$$
$$\nabla_{\widehat{\psi}}^{it} = \mathcal{Q}_L^*\Big(\int_{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}^{\oplus} E_\pi^{-2it}\otimes (E_\pi^{2it})^{\top}\,\mathrm{d}\mu(\pi)\Big)\mathcal{Q}_L,$$

dla $t\in\mathbb{R}$, gdzie $\nabla_{\widehat{\psi}}, \nabla_{\widehat{\varphi}}$ to operatory modularne związane z całkami $\widehat{\psi}, \widehat{\varphi}$. Dla grup kwantowych typu I jesteśmy w stanie wyrazić warunki takie jak unimodularność (czyli równość całek φ i ψ) czy śladowość całek Haara w terminach operatorów D_π, E_π ($\pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$).

Korzystając z rezultatów dotyczących grup kwantowych typu I, wraz z Piotrem Sołtanem byliśmy w stanie udowodnić wynik mówiący o tym, że dysk kwantowy (opisywany przez algebrę Toeplitza) nie ma struktury zwartej grupy kwantowej [2].

Innym zagadnieniem opisanym w pracy doktorskiej są wyniki uzyskane wraz z Mateuszem Wasilewskim w [3]. Problemem który badaliśmy jest pytanie, czy algebra von Neumanna $\mathscr{C}_{O_F^+}$ generowana przez charaktery jest maksymalnie przemienna w $\mathrm{L}^{\infty}(O_F^+)$, algebrze funkcji ograniczonych na kwantowej grupie ortogonalnej O_F^+, w przypadku gdy grupa ta nie jest typu Kaca (tzn. całka Haara nie jest śladowa). Uzyskaliśmy odpowiedź przeczącą. Nasze techniki pozwoliły również udowodnić interesujące wyniki dotyczące algebry von Neumanna $\mathrm{L}^\infty(U_F^+)$ funkcji ograniczonych na kwantowej grupie unitarnej U_F^+: (pod pewnymi warunkami) pokazaliśmy, że relatywny komutant $\mathscr{C}_{U_F^+}' \cap \mathrm{L}^\infty(U_F^+)$ nie jest zawarty w $\mathscr{C}_{U_F^+}$. Rezultaty te uzyskaliśmy korzystając z pojęcia quasi-rozszczepialności włożenia $\mathscr{C}_{\mathbb{G}} \subseteq \mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$. W tej części pracy przedstawimy również konstrukcję zwartej grupy kwantowej $\mathbb{H}$, powstającej jako iloczyn bikrzyżowy $\mathbb{H} = \mathrm{SU}_q(2) \bowtie \mathbb{Q}$. Ma ona ciekawe własności: niektóre automorfizmy skalowania $\mathbb{H}$ są wewnętrzne, a algebra von Neumanna $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{H})$ jest injektywnym faktorem typu II_∞.

W kolejnej części przedstawiamy wyniki łączące własności aproksymacyjne grupy kwantowej (zwykle dyskretnej) $\mathbb{G}$ oraz algebry von Neumanna $\mathrm{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$. Skupiamy się na średniowalności dla grupy kwantowej $\mathbb{G}$ oraz w*-w pełni dodatniej własności aproksymacyjnej (w*-CPAP) dla $\mathrm{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$. Związki takie znane są w literaturze w sytuacji gdy $\mathbb{G}$ ma śladowe całki Haara (czyli $\widehat{\mathbb{G}}$ jest typu Kaca), jednak dla ogólnych kwantowych grup dyskretnych równoważność między średniowalnością $\mathbb{G}$ a w*-CPAP algebry von Neumanna $\mathrm{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ jest problemem otwartym. Uzyskaliśmy wynik częściowy: równoważność ta zachodzi jeśli zmodyfikujemy w*-CPAP, tak aby brała pod uwagę również algebrę $\ell^\infty(\mathbb{G})$.

Literatura

[1] P. Desmedt. *Aspects of the theory of locally compact quantum groups: Amenability - Plancherel measure.* PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2003.

[2] J. Krajczok and P. M. Sołtan. The quantum disk is not a quantum group. *arXiv e-prints*, pages arXiv:2005.02967, to appear in J. Topol. Anal., 2020.

[3] J. Krajczok and M. Wasilewski. On the von Neumann algebra of class functions on a compact quantum group. *arXiv e-prints*, page arXiv:2103.06216, 2021.

[4] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting. *Math. Scand.*, 92(1):68–92, 2003.

[5] P. Podleś and S. L. Woronowicz. Quantum deformation of Lorentz group. *Comm. Math. Phys.*, 130(2):381–431, 1990.

[6] S. L. Woronowicz. Twisted SU(2) group. An example of a noncommutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 23(1):117–181, 1987.

[7] S. L. Woronowicz. Compact quantum groups. In *Symétries quantiques (Les Houches, 1995)*, pages 845–884. North-Holland, Amsterdam, 1998.