# Autoreferat

1. **Imię i nazwisko**. Piotr Stachura

2. **Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.**
   1999 - Doktor Nauk Matematycznych, Uniwersytet Warszawski; tytuł rozprawy: *Grupoidy różniczkowe i ich $C^*$-algebry*, promotor prof. dr hab. Janusz Grabowski;
   1989 - Magister Fizyki (z wyróżnieniem) - Uniwersytet Warszawski, opiekun prof. dr hab. Stanisław Lech Woronowicz.

3. **Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.**
   2011-... Katedra Zastosowań Matematyki, Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki, SGGW, Adiunkt;
   1991-2011 Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki UW, Asystent do 2000, potem Adiunkt, urlop 2002-2004;
   2002-2004 The George Washington University, Washington DC, Visiting Assistant Professor(1 rok), Teaching Fellow of CCAS (2 rok);
   1990-1991 Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Asystent.

4. **Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):**

**4a)** tytuł osiągnięcia naukowego

*Od Podwójnych Grup Liego przez Grupoidy Różniczkowe do Grup Kwantowych.*

**4b)** na które składa się poniższy cykl publikacji jednego autorstwa

(H1) *Manageability of Multiplicative Unitaries associated to Double Lie Groups*, Lett. Math. Phys. **51** (2000), 135-142.

(H2) *From Double Lie Groups to Quantum Groups*, Fundam. Math. **188** (2005), 195-240.

(H3) *Towards a topological (dual of) quantum $\kappa$-Poincaré group*, Rep. Math. Phys. **57** (2006), 233-256.

(H4) *On the quantum ' $ax + b$ ' group*, J. Geom. Phys. **73** (2013), 125-149.

(H5) *The $\kappa$-Poincaré Group on a $C^*$-level.* Internat. J. Math. (2019), https://doi.org/10.1142/S0129167X19500228

**4c)** omówienie celu naukowego prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Prace mieszczą się w nurcie *Geometrii Nieprzemiennej*, której motywem przewodnim jest patrzenie na algebry nieprzemienne tak, jak gdyby były one algebrami funkcji [7]. Twierdzenie Gelfanda-Najmarka mówi, że lokalnie zwarta przestrzeń topologiczna Hausdorffa $X$ jest w zupełności wyznaczona przez $C^*$-algebrę funkcji ciągłych, zespolonych, znikających w $\infty$ – $C_\infty(X)$ i, odwrotnie, każda przemienna $C^*$-algebra jest tej postaci. Odpowiedniość $X \leftrightarrow C_\infty(X)$ jest (kontrawariantną) równoważnością kategorii. W tym podejściu na $C^*$-algebry patrzymy jak na "lokalnie zwarte nieprzemienne (kwantowe) przestrzenie topologiczne".

Szczególną klasę przestrzeni nieprzemiennych tworzą *grupy kwantowe*. Początki tych obiektów sięgają lat 60. i wiążą się z uogólnieniem dualności Pontriagina dla lokalnie zwartych grup abelowych na inne typy grup. W tych uogólnieniach – dualności Tannaki-Kreina dla grup zwartych [42, 20], Stinespringa dla grup lokalnie zwartych unimodularnych [40] czy też Tatsuumy dla grup lokalnie zwartych [43] – obiekty dualne do grup nie były grupami, należały do innej kategorii. Próbą zdefiniowania kategorii z dualnością, której szczególnymi przykładami będą wspomniane wyżej, było pojęcie *ring-group* wprowadzone przez G. I. Kaca w [17]. W dzisiejszym języku były to algebry Hopfa-von Neumanna z *inwolutywnym antypodem*, wyposażone dodatkowo w wierny, normalny *ślad* (pełniący rolę miary Haara). W tej teorii udało się zawrzeć prawie wszystkie wcześniejsze dualności (Pontriagin, Tannaka-Krein, Stinespring). Dalszy jej rozwój, w szczególności rezygnacja ze śladowości miary Haara, doprowadził do kategorii *algebr Kaca*, wyposażonej w wewnętrzną dualność, która pokrywała wszystkie wyżej wymienione dualności znane z kategorii grup lokalnie zwartych. Teoria ta osiągnęła dojrzałą postać w latach 70. i 80. XXw i została opisana w monografii [14].

W latach 80. XXw pojawiły się nowe przykłady algebr Hopfa: kwantowe uniwersalne algebry obwiednie, które nazwano, chyba po raz pierwszy, "grupami kwantowymi" [12]. W tych przykładach antypod nie był inwolucją, lecz ponieważ były one natury czysto algebraicznej, nie stanowiły poważnego "zagrożenia" dla algebr Kaca.

W roku 1987 pojawiły się przełomowe prace S. L. Woronowicza o kwantowej grupie $SU(2)$ [47] i kwantowych grupach macierzowych [48]. Zapoczątkowały one rozwój teorii (zwartych) grup kwantowych opartych na $C^*$-algebrach a obiekty te wykraczały poza aksjomatykę algebr Kaca (antypod nie był inwolucją). Teoria zwartych grup kwantowych osiągnęła niezwykle prosty i elegancki system aksjomatów w [49]; w szczególności istnienie miary Haara *jest w tej teorii twierdzeniem*. W międzyczasie skonstruowano przykłady obiektów, które należałoby uznać za *lokalnie zwarte (ale nie zwarte i nie dyskretne) grupy kwantowe* [52, 34, 54]. Zwarte grupy kwantowe oraz obiekty do nich dwoiste, kwantowe grupy dyskretne, zyskały wspólny opis jako *algebraiczne grupy kwantowe* w [10, 21]. Był to opis algebraiczny, w terminach "$*$-algebr Hopfa bez 1" (*multiplier Hopf algebras*) [8], ale istnienie dodatniego, niezmienniczego funkcjonału, z którego potem konstruowano miarę Haara, *było założone*.

Ogólna teoria lokalnie zwartych grup kwantowych sprawiała jednak duże trudności, w przeciwieństwie do przypadku zwartego niemożliwe było udowodnienie istnienia miary Haara. Pewna wersja tej teorii została zaprezentowana (po wielu latach prac) w [30]. Zanim jednak to nastąpiło w roku 2000 ukazała sie praca S. Vaesa i J. Kustermansa [45], gdzie zaproponowano definicję lokalnie zwartej grupy kwantowej (co dalej będę skracał do LZGK), w której i*stnienie* *lewej i prawej miary Haara było częścią definicji.* Ta definicja jest obecnie w większości zaakceptowana jako definicja LZGK (występuje ona w dwóch, w zasadzie równoważnych, postaciach: opartych na algebrach von Neumanna lub $C^*$-algebrach).

Niejako alternatywna (do definicji Vaesa i Kustermansa) teoria bazuje na pojęciu *operatora multiplikatywnego i unitarnego* wprowadzonego przez S. Baaja i G. Skandalisa w pracy [2] (poniżej Def. 1.1) wraz z warunkiem *poręczności* zaproponowanym przez S. Woronowicza w [50] (poniżej Def. 1.2) lub, nieco ogólniejszym, warunkiem *modularności* [36, 37]. Tutaj nie zakłada się istnienia miary Haara. To podejście jest, w zasadzie ogólniejsze, z aksjomatów Vaesa i Kustermansa wynika bowiem, że grupy kwantowe w ich sensie są generowane przez modularne operatory multiplikatywne i unitarne. Z drugiej strony, nie jest znany przykład grupy kwantowej generowanej przez taki operator bez miary Haara, a np. A. van Daele wyraził opinię, że *"still it is not possible to give axioms so that the Haar weight can be found. It must be mentioned however that in this case, there are some indications that this might be possible in the near future"* [9]. Od tej opinii mija właśnie 13 lat.

Ważną klasą przykładów grup kwantowych są grupy kwantowe związane z rozkładami grup klasycznych na dwie podgrupy. Były jednymi z pierwszych nietrywialnych (tzn. nieprzemiennych i niekoprzemiennych) przykładów algebr Kaca [18] (przykład ten jest podany również w [31]). W kontekście algebr Hopfa były badane przez M. Takeuchi'ego [41] i S. Majida [27], (iloczyny bikrzyżowe algebr Hopfa – *bicrossproduct construction*); ten ostatni badał też, kiedy konstrukcja tego typu, związana z rozkładem grup Liego, prowadzi do algebr Kaca [28].

W bardzo ogólnym kontekście LZGK, konstrukcja *iloczynu bikrzyżowego* została podana w pracy S. Vaesa i L. Vainermana [46]. Mniej więcej w tym samym czasie pracowałem nad artykułem (H2) (umieszczony w arXiv w roku 2002). Jest w nim przedstawiona alternatywna, choć mniej ogólna, konstrukcja grupy kwantowej wychodząca od rozkładu grupy Liego na dwie podgrupy i bazująca na algebrach grupoidów w naturalny sposób związanych z takim rozkładem. Oparta jest ona na kategorii grupoidów opisanej przez Stanisława Zakrzewskiego w pracach [56, 57]. Kluczową różnicą jest pojęcie morfizmu grupoidów jako *relacji a nie odwzorowania.* Tak pojmowane morfizmy działają na elementy algebry grupoidowej i sprawiają, że przypisanie grupoidowi różniczkowemu jego $C^*$-algebry jest funktorem [39]. Teraz, z rozkładem grupy $G = AB$ na dwie podgrupy $A, B \subset G$ związane są dwa grupoidy (transformacyjne) $G_A : G \rightrightarrows A$ (notacja jest objaśniona poniżej) oraz $G_B : G \rightrightarrows B$. Okazuje się, że relacja mnożenia w jednym z tych grupoidów, powiedzmy $G_B$, definiuje kołączny morfizm z $G_A$ do $G_A \times G_A$, który po "podniesieniu"' do $C^*$-algebr daje komnożenie.

Jedną z najbardziej popularnych i badanych, zwłaszcza w kontekście możliwych zastosowań fizycznych (lub "fizycznych"), kwantowych deformacji jest tzw. *kappa* deformacja algebry Poincaré opisana po raz pierwszy w pracy J. Lukierskiego, A Nowickiego i H. Ruegga [26]. Jej struktura jako iloczynu bikrzyżowego (algebr Hopfa) została rozpoznana w pracy S. Majida i H. Ruegga [29]. Z kolei $\kappa$-deformację Grupy Poincaré na poziomie $*$-algebry Hopfa podał S. Zakrzewski w [58]. Jest ona bezpośrednią kwantyzacją pewnej struktury Poissona-Liego na grupie Poincaré [55, 38]. Deformacja ta i związana z nią "kwantowa przestrzeń Minkowskiego" była i wciąż jest tematem licznych prac z pogranicza fizyki i matematyki, pewien obraz daje przegląd [24]. Jednak niemal wszystkie rachunki odbywają sie na poziomie formalnych szeregów potęgowych (do wyjątków można zaliczyć np. [1, 13, 16]), w związku z czym trudno na ich podstawie czynić jakiekolwiek fizyczne ilościowe przewidywania. Jedną z motywacji autora było "zrobienie porządku z $\kappa$-deformacją". Wiadomo było bowiem od mojej pracy [38], że jest ona związana z pewnym rozkładem grupy Liego, ale rozkład ten nie zachodzi na całej grupie, lecz na zbiorze otwartym i gęstym, co nie przeszkadza w zastosowaniu wyników pracy [46], jednak uniemożliwia bezpośrednie zastosowanie metod grupoidowych. Zrozumienie natury przeszkód i sposobów ich pokonania było motywacją dla moich kolejnych prac. Skuteczny schemat, choć może nie do końca zadowalający, został opisany w *On the quantum 'ax + b' group* i zastosowany do grupy $\kappa$-Poincaré w ostatniej pracy składającej się na '"osiągnięcie".

Na zakończenie tego wstępu chciałbym wspomnieć o zaletach tego, mniej ogólnego niż w [46], podejścia. Grupy lokalnie zwarte, które występują w fizyce, to grupy Liego i tam struktura różniczkowa jest do naszej dyspozycji. Metody oparte na algebrach grupoidowych używają bezpośrednio tej struktury. Dostrzegając strukturę grupoidów różniczkowych, wiemy też, jakiej (semi) klasycznej grupy (Poissona-Liego) jest odpowiednikiem (kwantyzacją) nasza grupa kwantowa (tą grupą Poissona-Liego jest wiązka dualna do algebroidu Liego). Mamy też "naturalnych" kandydatów na generatory naszej $C^*$-algebry i ich klasyczne odpowiedniki, wreszcie możemy opisać mnożenie w terminach $*$-produktu i oglądać, jak różni się "prawdziwe" mnożenie w nieprzemiennej algebrze od "zwykłego" iloczynu funkcji.

### Podstawowe definicje i używana notacja

**Ogólnie stosowane konwencje i oznaczenia.** Ilekroć mowa jest o *rozmaitości* mam na myśli rozmaitość Hausdorffa, bez brzegu, gładką, parazwartą i spełniającą drugi aksjomat przeliczalności; *podrozmaitość* znaczy podrozmaitość zanurzona (embedded).

*Relacją $r$ ze zbioru $X$ do $Y$* nazywamy trójkę $(X, Y; R \subset Y \times X)$. $R$ jest wykresem relacji $r$ i będzie oznaczane przez $Gr(r)$. Tę formalną definicję będę na ogół skracał, utożsamiając relację z jej wykresem. Fakt, że $r$ jest relacją z $X$ do $Y$, będę zapisywał $r : X \longrightarrow\!\!\triangleright Y$. Dla relacji $r : X \longrightarrow\!\!\triangleright Y$ *relacja transponowana* $r^T : Y \longrightarrow\!\!\triangleright X$ jest określona przez warunek $(x, y) \in Gr(r^T) \iff (y, x) \in Gr(r)$. Jeżeli $X, Y$ są rozmaitościami i $R$ podrozmaitością w $Y \times X$, to $r$ nazywamy *relacją różniczkowalną*. Przez $\sim$ oznaczał będę przestawienie w iloczynie kartezjańskim (tensorowym): $\sim (x, y) = (y, x)$ ($\sim (x \otimes y) = y \otimes x$).

Dla rozmaitości $X$ przez $L^2(X)$ rozumiem (ośrodkową) przestrzeń Hilberta zdefiniowaną jako uzupełnienie $\Omega_c^{1/2}(X)$ - przestrzeni gładkich, zespolonych półgęstości na $X$ o zwartym nośniku. Wtedy każdy dyfeomorfizm $\phi : X \to X$ definiuje operator unitarny na $L^2(X)$, który na ogół będę oznaczał również przez $\phi$, zadany na $\Omega_c^{1/2}(X)$ przez popchnięcie półgęstości:

$$(\phi(\omega))(\phi(x))((\Lambda^{max} T_x\phi)v_x) := \omega(x)(v_x)\,,\ \omega \in \Omega_c^{1/2}(X)\,,\ x \in X\,,\ v_x \in \Lambda^{max} T_x X \tag{1}$$

Dla $C^*$-algebr $A, B$, ich *morfizm* oznacza niezdegenerowany $*$-homomorfizm $A \to M(B)$; takie odwzorowanie rozszerza się jednoznacznie do $*$-homomorfizmu $M(A) \to M(B)$ i to rozszerzenie umożliwia składanie morfizmów; symbol $A \otimes B$ oznacza *minimalny* iloczyn tensorowy; wszystkie występujące poniżej $C^*$-algebry, z wyjątkiem algebr mnożników, są *ośrodkowe*. Ilekroć jest mowa o *generatorach* $C^*$-algebry używam tego pojęcia w sensie Woronowicza [53].

**Grupy kwantowe.** Przez *grupę kwantową* rozumiem *lokalnie zwartą grupę kwantową*(LZGK). Podstawowymi składnikami tej struktury są $C^*$-algebra $A$ i *komnożenie* $\Delta \in Mor(A, A \otimes A)$, które jest *kołączne*:

$$(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta \tag{2}$$

i spełnia *warunek gęstości*:
Dla dowolnych $a, b \in A$, elementy $\Delta(a)(b \otimes I)$ oraz $\Delta(a)(I \otimes b)$ należą do $A \otimes A$ oraz

$$cls\{\Delta(a)(b \otimes I) : a, b \in A\} = cls\{\Delta(a)(I \otimes b) : a, b \in A\} = A \otimes A, \tag{3}$$

gdzie symbol “cls” oznacza domkniętą powłokę liniową.

*Miara Haara.* Miara Haara (prawa) na LZGK to gęsto określona, półciągła z dołu, waga KMS (na temat wag np. [45]), która jest *prawoniezmiennicza*, czyli

$$\psi((id \otimes \omega)\Delta(a)) = \omega(1)\psi(a)\,,\ a \in A\,,\ a \geq 0\,,\ \psi(a) < \infty\,,\ \omega \in A^*\,,\ \omega \geq 0.$$

Jak już wspominałem, istnieją dwa główne podejścia: jedno oparte na definicji Vaesa i Kustermansa [45], w którym istnienie dwóch - prawej i lewej - wiernych miar Haara *jest częścią definicji* LZGK, i drugie, rozwijane przez Woronowicza, w którym nie zakłada się istnienia miary Haara a główną rolę pełni *modularny operator multiplikatywny unitarny* [50, 37]. Te różnice w podejściu nie są istotne w omawianych pracach, ponieważ tam miara Haara istnieje.

*Antypod (koodwrotność)* w LZGK jest odwzorowaniem nieograniczonym i ma rozkład biegunowy:

$$S = R \cdot \tau_{i/2}, \tag{4}$$

gdzie $R : A \to A$ jest inwolutywnym $*$-antyautomorfizmem (tzn odwraca kolejność mnożenia) nazywanym *unitarnym antypodem*, a $\tau_{i/2}$ jest *analitycznym generatorem* 1-parametrowej grupy $*$-automorfizmów algebry $A$: $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t$ [50] nazywanej *grupą skalującą* (the scaling group). Obiekty te są związane z komnożeniem szeregiem warunków, które można znaleźć np. w [50].

**Grupoidy różniczkowe i ich $C^*$-algebry.** *Grupoidem* nazywamy małą kategorię, w której każdy morfizm jest izomorfizmem. Jak zauważył S. Zakrzewski [56] następująca definicja jest równoważna klasycznej definicji grupoidu.

**Definicja 0.1** *Grupoidem* nazywamy czwórkę $(\Gamma, m, s, e)$ składającą się ze zbioru $\Gamma$ oraz relacji $m : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma$, $e : \{*\} \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma$, $s : \Gamma \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma$ spełniających warunki:

$$m(m \times id) = m(id \times m)\,,\ m(e \times id) = m(id \times e) = id$$

$$s^2 = id\,,\ m(s \times s) \sim = sm\,, \text{ gdzie } \sim : \Gamma \times \Gamma \ni (x, y) \mapsto (y, x) \in \Gamma \times \Gamma,$$
$$\forall\, x \in \Gamma\ :\ \emptyset \neq m(x, s(x)) \subset e(\{*\}).$$

$\{*\}$ oznacza zbiór jednopunktowy, zbiór $e(\{*\}) \subset \Gamma$ będę oznaczał przez $E$ i nazywał *zbiorem jedności*; grupoid $\Gamma$ ze zbiorem jedności $E$ będę oznaczał $\Gamma \rightrightarrows E$; dla zbioru jedności stosował też będę (szeroko rozpowszechnione) oznaczenie $\Gamma^{(0)}$. Rzuty na zbiór jedności będę oznaczał przez $e_L, e_R : \Gamma \to E$, $e_R$ standardowo nazywa się rzutem *na dziedzinę* (domain or source projection) a $e_L$ - rzutem *na przeciwdziedzinę (obraz)* (range or target projection) ; $e_L$ ($e_R$) będę nazywał, zgodnie z oznaczeniem, *lewym (prawym) rzutem*, a dla $\gamma \in \Gamma$ zbiory $F_l(\gamma) := e_L^{-1}(e_L(\gamma))$ oraz $F_r(\gamma) := e_R^{-1}(e_R(\gamma))$ *lewym i prawym włóknem* przechodzącym przez $\gamma$. Okazuje się, że $m$ jest odwzorowaniem ze *zbioru elementów składalnych* $D(m) := \Gamma^{(2)} := \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma \times \Gamma : e_R(\gamma_1) = e_L(\gamma_2)\}$ na $\Gamma$. To spojrzenie na grupoidy prowadzi do *alternatywnej* definicji morfizmu (jako relacji) [56]:

**Definicja 0.2** Niech $(\Gamma, m, s, e)$ oraz $(\Gamma', m', s', e')$ będą grupoidami. Relację $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma'$ nazywamy *morfizmem (grupoidów)* jeżeli

$$hm = m'(h \times h)\,, \ \ hs = s'h\,, \ \ he = e'.$$

Grupoidy wraz ze zdefiniowanymi powyżej morfizmami (morfizmami Zakrzewskiego) tworzą kategorię. Warto podkreślić, że tak zdefiniowane morfizmy *nie są uogólnieniem* standardowych (homo)morfizmów grupoidów czyli funktorów. Okazuje się, że dla grupoidów $\Gamma \rightrightarrows E$ , $\Gamma' \rightrightarrows E'$ morfizm $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma'$ definiuje *odwzorowanie bazowe* $f_h : E' \to E$ oraz, dla każdego $e' \in E'$, odwzorowania $h^L_{e'} : F_l(f_h(e')) \to F_l(e')$ i $h^R_{e'} : F_r(f_h(e')) \to F_r(e')$ między lewymi i prawymi włóknami.

Zbiór $B \subset \Gamma$ nazywamy *bicięciem* (grupoidu $\Gamma$), jeżeli jest cięciem prawego i lewego rzutu nad $E$, tzn $e_L|_B, e_R|_B : B \to E$ są bijekcjami. W przeciwieństwie do standardowych homomorfizmów, morfizmy Zakrzewskiego działają na bicięcia: jeżeli $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma'$ jest morfizmem i $B \subset \Gamma$ bicięciem, zbiór $h(B)$ jest bicięciem $\Gamma'$. Bicięcia tworzą grupę względem naturalnego mnożenia podzbiorów grupoidu oraz działają na grupoidzie przez lewe mnożenie. To działanie zachowuje prawe włókna i przeprowadza lewe włokna w lewe włókna. Morfizm grupoidów zadaje homomorfizm grupy bicięć.

Grupoidy związane z grupami podwójnymi (opisane poniżej) są *grupoidami transformacyjnymi.* Jeżeli $X \times G \ni (x, g) \mapsto xg \in X$ jest (prawym) działaniem grupy $G$ na zbiorze $X$, na zbiorze $\Gamma := X \times G$ mamy strukturę grupoidu zdefiniowaną jako:

$$E := \{(x, e) : x \in X\} \simeq X\,,\ s(x, g) := (xg, g^{-1})\,,\ m := \{(x, gh; x, g, xg, h) : x \in X\,,\ g, h \in G\}$$

Ten grupoid nazywamy grupoidem transformacyjnym (dla działania $G$).

*Grupoid różniczkowy* to rozmaitość z "gładką strukturą grupoidu", czyli występujące w definicji relacje są *relacjami różniczkowalnymi.* Ponieważ jednak złożenie relacji różniczkowalnych może nie być relacją różniczkowalną, konieczne jest nałożenie dodatkowych warunków *transwersalności* na występujące w definicji złożenia [57]. W ten sposób otrzymujemy grupoidy różniczkowe, w których: zbiór jedności $E$ oraz zbiór elementów składalnych $\Gamma^{(2)}$ są podrozmaitościami, rzuty $e_L, e_R$ oraz mnożenie $m$ (jako odzworowanie z $\Gamma^{(2)}$) są surjektywnymi submersjami a odwrotność grupoidowa $s$ jest dyfeomorfizmem. *Morfizmy grupoidów różniczkowych* są relacjami różniczkowalnymi spełniającymi warunki zawarte w Def. 0.2 oraz odpowiednie warunki transwersalności, które zapewniają, między innymi, gładkość odwzorowania bazowego i odwzorowań między włóknami.

Z grupoidem różniczkowym jest w kanoniczny sposób związana pewna $C^*$-algebra, która uogólnia konstrukcję $C^*$-algebry grupowej (ściśle rzecz biorąc, podobnie jak dla grup, mamy dwie wersje tej algebry: pełną i zredukowaną). Ta konstrukcja i jej własności były tematem mojej rozprawy doktorskiej [39]. Poniżej przedstawiam zarys konstrukcji potrzebny do zrozumienia zawartości prac składających się na "osiągnięcie".

Niech $\Gamma \rightrightarrows E$ będzie grupoidem różniczkowym. Niech $\Omega^{1/2}_L, \Omega^{1/2}_R$ będą wiązkami zespolonych półgęstości wzdłuż lewych i prawych włókien $\Gamma$ a $\mathcal{A}(\Gamma)$ oznacza przestrzeń wektorową gładkich cięć wiązki $\Omega^{1/2}_L \otimes \Omega^{1/2}_R$ *o zwartych nośnikach.* Na $\mathcal{A}(\Gamma)$ wprowadzamy strukturę $*$-algebry w następujący sposób. Wybierzmy $\lambda_0$ - rzeczywistą, nieznikającą i lewoniezmienniczą półgęstość wzdłuż lewych włókien (taka półgęstość definiuje na $\Gamma$ *lewy system Haara*; w [39] wykazano, że nic dalej od tego wyboru nie zależy i zaprezentowano konstrukcje jawnie wolną od tego wyboru). Niech $\rho_0 := s(\lambda_0)$ będzie obrazem $\lambda_0$ w działaniu odwrotności grupoidowej $s$, wtedy $\rho_0$ jest prawoniemienniczą półgęstością i definiujemy $\omega_0 := \lambda_0 \otimes \rho_0$. Każdy element $\omega \in \mathcal{A}(\Gamma)$ może być wtedy jednoznacznie zapisany jako $\omega = f\omega_0$ dla pewnej funkcji $f \in C_c^\infty(\Gamma)$ (gładkiej zespolonej, o zwartym nośniku). Mnożenie $\omega_1 = f_1\omega_0$ oraz $\omega_2 = f_2\omega_0$ w $\mathcal{A}(\Gamma)$ jest zdefiniowane jako:

$$
\begin{aligned}
&(f_1\omega_0)(f_2\omega_0) =: (f_1 * f_2)\omega_0, \\
&(f_1 * f_2)(\gamma) := \int_{F_l(\gamma)} \lambda_0^2(\gamma')f_1(\gamma')f_2(s(\gamma')\gamma) = \int_{F_r(\gamma)} \rho_0^2(\gamma')f_1(\gamma s(\gamma')f_2(\gamma')
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Operacja sprzężenia jest zdefiniowana następująco:

$$
(f\omega_0)^* =: (f^*)\omega_0 \, , \; f^*(\gamma) := \overline{f(s(\gamma))} \tag{6}
$$

Wybór $\lambda_0$ wraz z konstrukcją odpowiadającej jej $\omega_0$ definiuje na $\mathcal{A}(\Gamma)$ normę, względem której $\mathcal{A}(\Gamma)$ jest unormowaną $*$-algebrą:

$$
||f\omega_0||_0 := ||f||_0 := max\left\{\sup_{e\in E}\int_{F_l(e)} \lambda_0^2(\gamma)|f(\gamma)|, \sup_{e\in E}\int_{F_r(e)} \rho_0^2(\gamma)|f(\gamma)|\right\}.
$$

$*$-algebra $\mathcal{A}(\Gamma)$ jest wiernie reprezentowana na $L^2(\Gamma)$, oznaczmy tę reprezentację przez $\pi_{id}$. Jest ona zdefiniowana następująco: wybierzmy $\nu_0$ - rzeczywistą, nieznikającą gładką półgęstość na $E$; ponieważ $e_R : \Gamma \to E$ jest surjektywną submersją, wzór: $\psi_0 := \rho_0 \otimes \nu_0$ definiuje na $\Gamma$ rzeczywistą, nieznikającą półgęstość $\psi_0$. Wtedy na $\Omega_c^{1/2}(\Gamma)$ reprezentacja $\pi_{id}$ jest dana przez;

$$
\pi_{id}(f_1\omega_0)(f_2\psi_0) =: (\pi_{id}(f_1)f_2)\psi_0 \, , \; \pi_{id}(f_1)f_2 = f_1 * f_2 \, , \;\; f_1, f_2 \in C_c^\infty(\Gamma) \tag{7}
$$

Występująca w powyższym wzorze operacja $f_1 * f_2$ została zdefiniowana w (5). Z uwagi na oszacowanie $||\pi_{id}(\omega)|| \leq ||\omega||_0$, następująca definicja ma sens:

**Definicja 0.3** *Zredukowaną $C^*$-algebrą grupoidu różniczkowego* $\Gamma$ nazywamy domknięcie $\pi_{id}(\mathcal{A}(\Gamma))$ w normie operatorowej. Tę algebrę będziemy oznaczać przez $C_r^*(\Gamma)$

Okazuje się, że morfizmy grupoidów różniczkowych działają na elementy algebry grupoidowej. Morfizm $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\!\triangleright\, \Gamma'$ definiuje odwzorowanie liniowe $\hat{h} : \mathcal{A}(\Gamma) \to L(\mathcal{A}(\Gamma'))$ ($L(\mathcal{A}(\Gamma'))$ oznacza odwzorowania liniowe na $\mathcal{A}(\Gamma')$) oraz reprezentację $\pi_h$ $*$-algebry $\mathcal{A}(\Gamma)$ w $L^2(\Gamma')$. Odwzorowanie $\hat{h}$ jest przemienne z mnożeniem w $\mathcal{A}(\Gamma')$ w sensie:

$$
\hat{h}(\omega)(\omega')\omega'' = \hat{h}(\omega)(\omega'\omega'') \, , \; \omega \in \mathcal{A}(\Gamma) \, , \; \omega', \omega'' \in \mathcal{A}(\Gamma')
$$

Ponadto zachodzi:

**Stwierdzenie 0.4** [39] *Niech $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ będą grupoidami różniczkowymi a $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\!\triangleright\, \Gamma'$ oraz $k : \Gamma' \longrightarrow\!\!\!\triangleright\, \Gamma''$ morfizmami (grupoidów różniczkowych). Dla dowolnych $\omega \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $\omega', \omega_1' \in \mathcal{A}(\Gamma'), \omega'' \in \mathcal{A}(\Gamma'')$:*

*a)* $\hat{k}((\hat{h}(\omega)\omega'))\omega'' = \hat{kh}(\omega)(\hat{k}(\omega')\omega'')$

*b)* $\pi_k(\hat{h}(\omega)\omega') = \pi_{kh}(\omega)\pi_k(\omega')$

*c) $(\omega')^*(\hat{h}(\omega)\omega'_1) = (\hat{h}(\omega^*)\omega')^*\omega'_1$*

*d) Dla dowolnego wyboru $\omega_0$ zachodzi oszacowanie: $||\pi_h(\omega)|| \leq ||\omega||_0$*

$\blacksquare$

Poniżej jest podana jawna formuła takiego odwzorowania dla morfizmu zadającego komnożenie w przypadku podwójnych grup Liego (10).

Bicięcia grupoidu różniczkowego działają na algebrze grupoidowej $\mathcal{A}(\Gamma)$ i na $L^2(\Gamma)$; te działania umożliwiają ich interpretowanie jako unitarnych mnożników w $C^*_r(\Gamma)$. Są one również transportowane przez morfizmy:

**Stwierdzenie 0.5** [(H2) Prop. 1.6] *Niech $\Gamma, \Gamma'$ będą grupoidami różniczkowmi, $B$ bicięciem grupoidu $\Gamma$ oraz $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma'$ morfizmem. Dla $\omega, \omega_1 \in \mathcal{A}(\Gamma)$ i $\omega' \in \mathcal{A}(\Gamma')$:*

*1. $\omega^*(B\omega_1) = (s(B)\omega)^*\omega_1$*

*2. $(\hat{h}(B\omega))\omega' = h(B)(\hat{h}(\omega)\omega')$*

*3. $\pi_h(B\omega) = h(B)\pi_h(\omega)$.*

$\blacksquare$

**Grupy podwójne i grupoidy związane z grupami podwójnymi.** Niech $G$ będzie grupą a $A, B \subset G$ jej podgrupami spełniającymi warunek $A \cap B = \{e\}$. Zdefiniujmy zbiór *elementów rozkładalnych* $\Gamma := AB \cap BA$; każdy element z tego zbioru może być zapisany jednoznacznie w postaci

$$g = a_L(g)b_R(g) = b_L(g)a_R(g)\,; \qquad a_L(g), a_R(g) \in A\,,\; b_L(g), b_R(g) \in B. \tag{8}$$

Te rozkłady definiują surjekcje: $a_L, a_R : \Gamma \to A$ oraz $b_L, b_R : \Gamma \to B$. Okazuje się, że na zbiorze $\Gamma$ można zdefiniować strukturę grupoidu (a nawet dwie takie struktury). Jedna z nich, $\Gamma_A : \Gamma \rightrightarrows A$, zadana jest wzorami:

$$E := A\,,\;\; s_A(g) := b_L(g)^{-1}a_L(g) = a_R(g)b_R(g)^{-1}\,,\; Gr(m_A) := \{(b_1ab_2; b_1a, ab_2) : b_1a, ab_2 \in \Gamma\} \tag{9}$$

Podobnie definiujemy grupoid $\Gamma_B : \Gamma \rightrightarrows B$ z odwrotnością $s_B$ i relacją mnożenia $m_B$.

Jeżeli $G = \Gamma = AB$ trójkę $(G; A, B)$ nazywamy *grupą podwójną* (terminologia zaczerpnięta z [23]). W tej sytuacji grupoidy $\Gamma_A, \Gamma_B$ będą oznaczane przez $G_A, G_B$. Grupoid $G_A$ jest grupoidem transformacyjnym względem kanonicznego (prawego) działania $B$ na $B\backslash G$: $G_A \simeq (B\backslash G) \times B$ (analogicznie $G_B$). Okazuje się [56], że relacja $m_B^T : G_A \longrightarrow\!\!\triangleright\, G_A \times G_A$ jest kołącznym (tzn. $(m_B^T \times id)\, m_B^T = (id \times m_B^T)\, m_B^T$) morfizmem grupoidów.

Gdy $G$ jest grupą Liego a $A, B$ jej *domkniętymi podgrupami* grupę podwójną $(G; A, B)$ będę nazywał *podwójną grupą Liego*, co będzie w dalszym ciągu skracane do PGL. W tej sytuacji grupoidy $G_A$ i $G_B$ są grupoidami różniczkowymi a $\delta := m_B^T$ jest morfizmem grupoidów różniczkowych. Opiszę teraz postać odwzorowania $\hat{\delta}$. Wybierzmy rzeczywistą półgęstość $\mu_0 \neq 0$ na $T_eB$ i zdefiniujmy lewoniezmienniczą półgęstość $\lambda_0$ na $G_A$ jak poniżej, i niech $\rho_0$ będzie odpowiadającą jej prawoniezmienniczą półgęstością:

$$\lambda_0(g)(v) := \mu_0(g^{-1}v)\,,\; v \in \Lambda^{max}T^l_gG_A\,,\; \rho_0(g)(w) := j_B(a_L(g))^{-1/2}\mu_0(wg^{-1})\,,\; w \in \Lambda^{max}T^r_gG_A,$$

gdzie $T^l_g G_A (T^r_g G_A)$ jest przestrzenią styczną $g$ do lewego (prawego) włókna grupoidu $G_A$ oraz $j_B(g) := |\det(P_{\mathfrak{b}} Ad(g)|_{\mathfrak{b}})|$, tutaj $P_{\mathfrak{b}}$ jest rzutem na algebrę Liego grupy $B$ zadanym przez rozkład algebry Liego grupy $G$ na sumę prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Wzór na $\hat{\delta}$ ma postać:

$$\hat{\delta}(f\omega_0)(F(\omega_0 \otimes \omega_0)) =: (\hat{\delta}_0(f)F)(\omega_0 \otimes \omega_0)\,, \;\; f \in C^\infty_c(G)\,, \;\; F \in C^\infty_c(G \times G)$$
$$(\hat{\delta}(f)F)(a_1b_1, a_2b_2) = \int_B d_l b\, j_B(b_L(a_2b))^{-1/2} f(a_1a_2b)\, F(b_L(a_1a_2b)^{-1}a_1b_1, a_R(a_2b)b^{-1}b_2), \quad (10)$$

gdzie $d_l b$ jest lewą miarą Haara na zdefiniowaną przez $\mu_0$.

Przystąpię teraz do omówienia prac składających się na "osiągnięcie".

### *Manageability of Multiplicative Unitaries Associated to Double Lie Groups.*

Jednym z "milowych kroków" w teorii grup kwantowych jest praca [2], wprowadzająca pojęcie unitarnego operatora multiplikatywnego (*multiplicative unitary operator*), który (przy pewnych dodatkowych warunkach) zawiera w sobie pełną informację o $C^*$-algebrze i komnożeniu (również o grupie dwoistej).

**Definicja 1.1** Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta a $W$ operatorem unitarnym na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. $W$ nazywamy operatorem *multiplikatywnym,* jeżeli spełnia równanie:

$$W_{23}W_{12} = W_{12}W_{13}W_{23}, \quad (11)$$

gdzie $W_{ij}$ oznacza operator na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, np. $W_{12} = W \otimes I$, itd.

Dodatkowy warunek, nałożony na $W$ nosi nazwę *regularności.* Okazało się jednak [3], że operatory multiplikatywne unitarne związane z niektórymi znanymi grupami kwantowymi nie są regularne. Woronowicz zaproponował zastąpienie regularności warunkiem *poręczności* (manageability), który był spełniony we wszystkich znanych przykladach. Oto ten warunek:

**Definicja 1.2** [50] Niech $\overline{\mathcal{H}}$ oznacza przestrzeń zespolenie sprzężoną do $\mathcal{H}$. Niech $W$ będzie operatorem multiplikatywnym i unitarnym na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Powiemy, że $W$ jest *poręczny,* jeżeli istnieje operator unitarny $\widetilde{W} : \overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{H}$ oraz ściśle dodatni, samosprzężony operator $Q : \mathcal{H} \supset D(Q) \longrightarrow \mathcal{H}$, które spełniają warunki:

$$\begin{aligned} &\text{a) } (x \otimes u \,|\, W(z \otimes y)) = (\overline{z} \otimes Qu \,|\, \widetilde{W}(\overline{x} \otimes Q^{-1}y))\,,\; x, z \in H\,,\; u \in D(Q)\,,\; y \in D(Q^{-1}), \\ &\text{b) } W^*(Q \otimes Q)W = (Q \otimes Q). \end{aligned} \quad (12)$$

Wiadomo było, że z PGL $(G; A, B)$ jest związany unitarny operator multiplikatywny. Głównym rezultatem tej krótkiej pracy było wykazanie jego poręczności (i jawne podanie operatorów $\widetilde{W}$ oraz $Q$).

Operator $W : L^2(G \times G) \to L^2(G \times G)$ jest zadany (wzorem (1)) przez dyfeomorfizm

$$\Psi : G \times G \ni (s, t) \mapsto \Psi(s, t) := (sa_L(t)^{-1}, b_R(sa_L(t)^{-1})t) \in G \times G, \quad (13)$$

który spełnia równanie pentagonalne: $\Psi_{23}\Psi_{12} = \Psi_{12}\Psi_{13}\Psi_{23}$ gdzie $\Psi_{ij} : G\times G\times G \to G\times G\times G$ oraz indeksy $ij$ mówią, na które "nogi" w iloczynie działa $\Psi$, np. $\Psi_{23} = id \times \Psi$, itd.

Operator $Q$ jest zadany jako operator mnożenia przez pewną dodatnią funkcję na $G$ otrzymaną w następujący sposób: niech $\mathfrak{g}$ , $\mathfrak{a}$ , $\mathfrak{b}$ będą algebrami Liego grup $G, A, B$, wtedy $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ (suma prosta przestrzeni wektorowych); korzystając z tego rozkładu możemy zapisać reprezentację dołączoną jako $Ad_g =: \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$, gdzie $g_1 : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}$ , $g_2 : \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{a}$, etc.; funkcja $\tilde{Q}$ jest definiowana jako:

$$G \ni g \mapsto \tilde{Q}(g) := \frac{\det(Ad_g)}{\det(g_1)\det(g_4)} \in R \setminus \{0\}. \tag{14}$$

Okazuje się, że $\tilde{Q}$ jest 1-kocyklem na grupoidach $G_A$ i $G_B$:

**Stwierdzenie 1.3** *Dla dowolnych $a, a' \in A$ , $b, b' \in B$:*

$$\tilde{Q}(ab)\tilde{Q}(ba') = \tilde{Q}(aba')\,,\ \tilde{Q}(ba)\tilde{Q}(ab') = \tilde{Q}(bab').$$

■

Definiujemy operator $Q : \Omega_c^{1/2}(G) \longrightarrow \Omega_c^{1/2}(G)$ jako operator mnożenia przez funkcję $|\tilde{Q}|^{1/2}$.

Operator unitarny $\widetilde{W} : \overline{L^2(G)} \otimes L^2(G) \to \overline{L^2(G)} \otimes L^2(G)$ jest zadany (jako popchnięcie półgęstości) przez dyfeomorfizm

$$\Omega : G \times G \ni (s,t) \mapsto (s a_L(t), b_R(s)t) \in G \times G.$$

Głównym wynikiem pracy jest

**Twierdzenie 1.4** *Operator $Q$ jest domykalny i jego domknięcie jest operatorem samosprzężonym i ściśle dodatnim. Tak otrzymany operator $Q$ wraz z operatorami $W$ i $\widetilde{W}$ spełniają warunki poręczności (12).* ■

## *From Double Lie Groups to Quantum Groups*

W pracy tej, jak głosi tytuł, zaprezentowana jest kompletna konstrukcja grup kwantowych związanych z podwójnymi grupami Liego. Konstrukcja wykorzystuje algebry grupoidowe i wyniki z pracy [39]. Jej zasadniczy rezultat to twierdzenie:

**Twierdzenie 2.1** [(H2) Thm. 4.1] *Niech $(G; A, B)$ będzie PGL, $G_A = (G, m_A, s_A, A)$ oraz $G_B = (G, m_B, s_B, B)$ związanymi z nią grupoidami różniczkowymi i $\delta := m_B^T : G_A \longrightarrow\!\!\triangleright\, G_A \times G_A$. Odwzorowanie $\hat{\delta}$, zadane wzorem (10), rozszerza się jednoznacznie do komnożenia $\Delta \in Mor(C_r^*(G_A), C_r^*(G_A) \otimes C_r^*(G_A))$ (innymi słowy $\Delta$ jest kołączne (2) oraz spełnia warunki gęstości (3)).* ■

Ponadto, jak można było oczekiwać, $\Delta$ jest implementowane przez związany z PGL unitarny operator multiplikatywny zdefiniowany przez dyfeomorfizm (13).

**Stwierdzenie 2.2** [(H2) Proposition 4.2] *Reprezentacja $\pi_\delta$ (związana z morfizmem $\delta$ wzorem analogicznym do (10)) jest implementowana przez operator $W$, czyli*

$$\pi_\delta(\omega) = W(\pi_{id}(\omega) \otimes I)W^*$$

■

Związek operatora unitarnego i multiplikatywnego $W$ (a dokładnie definiującego go dyfeomorfizmu) ze strukturą grupoidów jest dany przez następujące

**Stwierdzenie 2.3** [(H2) Lemma 3.3] *Niech $G_B^{op}$ oznacza grupoid $G_B$ z odwróconą kolejnością mnożenia. Niech $U := \{(s_B(g), g) : g \in G\}$, gdzie $s_B$ jest odwrotnością w grupoidzie $G_B$. $U$ jest bicięciem grupoidu różniczkowego $G_B^{op} \times G_A$ oraz*

$$U(s,t) = \Psi(s,t)\,,\ s,t \in G,$$

*(po lewej stronie równości mamy działanie bicięcia na elementy grupoidu, po prawej działanie dyfeomorfizmu $\Psi$ zdefiniowanego w (13))* ■

Również pozostałe składniki struktury grupy kwantowej mają w tej sytuacji grupoidową interpretację i można je określić najpierw na $\mathcal{A}(G_A)$ a następnie przedłużyć do $C_r^*(G_A)$. Opiszę pokrótce konstrukcję antypodu i miary Haara.

*Antypod.* Ponieważ komnożenie $\Delta$ jest implementowane przez poręczny operator multiplikatywny unitarny $W$, to z pracy [50] wiadomo, jak powinna wyglądać grupa skalująca, której analityczny generator występuje w rozkładzie biegunowym antypodu (4)– grupa ta powinna być związana z funkcją $\tilde{Q}$ zdefiniowaną w (14). Ponieważ $\tilde{Q}$ jest 1-kocyklem na $G_A$ (Stw. 1.3) następujące odwzorowanie zadaje automorfizm (ale nie $*$-automorfizm) algebry $\mathcal{A}(G_A)$:

$$\tau_z : \mathcal{A}(G_A) \ni \omega \mapsto |\tilde{Q}|^{iz}\omega \in \mathcal{A}(G_A)\,,\ z \in \mathbb{C}$$

Z kolei unitarna część antypodu $R$ jest implementowana przez *odwrotność w grupie* $G$:

$$R(\omega)(g)(v \otimes w) := \omega(g^{-1})(w^{-1} \otimes v^{-1})\,, \omega \in \mathcal{A}(G_A)\,,\ \ v \in \Lambda^{max}(T_g F_l(g))\,,\ w \in \Lambda^{max}(T_g F_r(g)),$$

gdzie $F_l(g), F_r(g)$ oznaczają lewe i prawe włókno przechodzące przez $g$ a $v^{-1}, w^{-1}$ oznaczają obrazy $v, w$ w (odwzorowaniu stycznym do) odwrotności w grupie $G$, odwrotność ta przekształca lewe włókna w prawe. Wreszcie antypod $S$, na poziomie algebry $\mathcal{A}(G_A)$, jest zadany wzorem (4). Te obiekty mają następujące właściwości:

**Stwierdzenie 2.4** [(H2) Prop. 5.1]

1. *Rodzina $\{\tau_z\,,\ z \in \mathbb{C}\}$ jest jednoparametrową (zespoloną) grupą automorfizmów algebry $\mathcal{A}(G_A)$; ponadto $\tau_z \cdot * = * \cdot \tau_{\overline{z}}$;*
2. *$R$ jest inwolutywnym $*$-antyautomorfizmem oraz $R \cdot \tau_z = \tau_z \cdot R$;*
3. *$S(\omega_1\omega_2) = S(\omega_2)S(\omega_1)\,,\ \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}(\Gamma_A)$ oraz $S \cdot * \cdot S \cdot * = id$.*

■

Obiekty te rozszerzają się na $C_r^*(G_A)$, dając "prawdziwą" grupę skalującą i "prawdziwy" antypod [(H2) Props. 5.4, 7.2, Lem. 7.1].

*Miara Haara.* Niech $(\Gamma, m, s, E)$ będzie grupoidem różniczkowym. Niech $\rho$ będzie rzeczywistą, prawoniezmienniczą, nieznikającą półgęstością wzdłóż prawych włokien $\Gamma$ a $\nu$ rzeczywistą, nieznikającą półgęstością na $E$. Para $(\rho, \nu)$ zadaje na $\mathcal{A}(\Gamma)$ następujące obiekty:

- gładki kocykl $\sigma : \Gamma \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zadany wzorem $\sigma(g)(\rho \otimes \nu)(g) = (s(\rho) \otimes \nu)(g)$, kocykl ten definiuje jednoparametrową (zespoloną) grupę automorfizmów algebry $\mathcal{A}(\Gamma)$ wzorem $\sigma_z : \omega \mapsto |\sigma|^{2iz}\omega\,,\ z \in \mathbb{C}$,
- dodatni liniowy funkcjonał $h$ na $\mathcal{A}(\Gamma)$ zadany wzorem $h(f\omega_0) := \displaystyle\int_E f\nu^2\,,\ \omega_0 := s(\rho) \otimes \rho$,
- odwzorowanie $\hat{h} : \mathcal{A}(\Gamma) \ni f\omega_0 \mapsto f(\rho \otimes \nu) \in L^2(\Gamma)$.

Związek między $\sigma, h$ i $\hat{h}$ opisuje

**Stwierdzenie 2.5** [(H2) Prop. 6.1] *Niech $\omega, \omega_1 \in \mathcal{A}(\Gamma)$.*

- $h(\omega^*\omega) = (\hat{h}(\omega)\,|\,\hat{h}(\omega))$*, gdzie po prawej stronie mamy iloczyn skalarny w* $L^2(\Gamma)$*;*
- $h(\sigma_z(\omega)\omega_1) = h(\omega_1\sigma_{z-i}(\omega))$
- $\hat{h}(\omega\omega_1) = \pi_{id}(\omega)\hat{h}(\omega_1)$

■

Jak sugerują powyższe zależności, te dane zadają na $C_r^*(\Gamma)$ wagę $h$; dla której $\hat{h}$ jest odwzorowaniem GNS a $\sigma_t$ grupą modularną:

**Stwierdzenie 2.6** [(H2) Prop. 6.4] *Odwzorowanie $\hat{h}$ jest domykalne i definiuje odwzorowanie GNS z $C_r^*(\Gamma)$ w $L^2(\Gamma)$. Wobec tego, $h$ rozszerza się do gęsto określonej, półciągłej z dołu wagi KMS na $C_r^*(\Gamma)$ z grupą modularną $\sigma_t$.* ■

W sytuacji grupoidu $G_A$ para $(\rho, \nu)$ jest zdefiniowana przez wybór $\mu_0 \neq 0$ oraz $\nu_0 \neq 0$ półgęstości na $T_eB$ i $T_eA$ (odpowiednio) i zdefiniowaniu

$$\rho(g)(w) := \mu_0(wg^{-1})\,,\ g \in G\,,\ w \in \Lambda^{max}T_g^rG_A\,, \quad \nu(a)(u) := \nu_0(ua^{-1})\,,\ a \in A\,,\ u \in \Lambda^{max}T_aA$$

Otrzymana w ten sposób waga jest prawą wagą Haara na $(C_r^*(G_A), \Delta)$ [(H2), Prop. 6.8].

## *Towards a topological (dual of) quantum $\kappa$-Poincaré group*

Celem tej pracy była, z jednej strony analiza relacji definiujących $\kappa$-Poincaré *algebrę Hopfa* w tzw. bazie bikrzyżowej (bicrossproduct basis) podanych przez S. Majida i H. Ruegga w [29] i wyjaśnienie pewnych pojawiających się w literaturze (głównie fizycznej) sprzecznych stwierdzeń, z drugiej – wskazanie, że dzięki wynikom S. Vaesa i L. Vainermana [46] z moich rachunków dokonanych w pracy (P2) wynika, że relacje $\kappa$-Poincaré algebry Hopfa mają "podniesienie" do LZGK, dwoistej do grupy $\kappa$-Poincaré.

$\kappa$-Poincaré algebra Hopfa (w bazie bikrzyżowej) jest generowana przez elementy $(N_i, M_j, P_\mu)$, $i, j = 1, 2, 3,\ \mu = 0, 1, 2, 3$ i relacje ($\lambda \in \mathbb{R}$ jest parametrem, $\lambda = 1/\kappa$):

$$[M_k, M_l] = i\,\epsilon_{klm}M_m\,,\ [M_k, N_l] = i\,\epsilon_{klm}N_m\,,\ [N_k, N_l] = -i\,\epsilon_{klm}M_m,$$

$$[M_k, P_l] = i\,\epsilon_{klm} P_m\,,\ \ [M_k, P_0] = 0\,,\ \ [N_k, P_0] = i\,P_k\,,\ \ [P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{15}$$
$$[N_k, P_l] = \frac{i}{\lambda}\left[\frac{\delta_{kl}}{2}\left(1 - \exp(-2\lambda P_0) + \lambda^2 \overline{P}^2\right) - \lambda^2 P_k P_l\right]$$

(do tych relacji dochodzą wzory na komnożenie i antypod, których nie będę tu przytaczał). Te relacje są pewną deformacją relacji w algebrze Liego grupy Poincaré; jeżeli $N_i$ są generatorami pchnięć, $M_i$ obrotów a $P_\mu$ translacji, to relacje (15) są zwykłymi relacjami w algebrze Liego, jedynie komutacja (generatorów) pchnięć z translacjami jest zdeformowana (przechodząc w ostatniej relacji z $\lambda$ do zera, odzyskujemy standardową relację dla algebry Liego). Jednak obecność funkcji wykładniczej w ostatnim wzorze, zmusza nas do rozważania tych relacji w algebrze formalnych szeregów potęgowych, czyli $\lambda$ jest formalnym parametrem i trudno przypisać mu jakąś fizyczną interpretację. Można jednak przepisać te relacje w nieco innej formie, mianowicie definiując $Y_\mu := \lambda P_\mu$ i (formalnie) $S := \exp(-Y_0)$, otrzymujemy te spośród (15), które zawierają $S$ i $Y_k$ jako:

$$\begin{aligned} &[Y_k, Y_l] = [S, Y_k] = 0, \\ [M_k, Y_l] = i\,\epsilon_{klm} Y_m\,, \qquad & [M_k, S] = 0\,, \\ [N_k, S] = -i\,S Y_k\,, \qquad & [N_k, Y_l] = i\left[\frac{\delta_{kl}}{2}\left(1 - S^2 + \overline{Y}^2\right) - Y_k Y_l\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

W tej postaci, naturalne jest szukać realizacji tych relacji przez działanie algebry Lorentza (generatory $N_j, M_j$) przez pola wektorowe na (być może podzbiorze) $R_+ \times \mathbb{R}^3$ ze współrzędnymii $S, Y_k$, a następnie spytać, czy to działanie całkuje się do działania Grupy Lorentza. Tego rodzaju (niekompletne) rachunki dokonane zostały w pracy [6]. W swojej pracy pokazałem, jak te relacje wynikają ze struktury grupoidu $\Gamma_C$ (opisanego poniżej) i z czego wynikają przeszkody w scałkowaniu działania algebry do grupy Liego. Wyjaśniłem też, dlaczego relacje powyższe są, jak zauważono w [25], zgodne z pewnym symetrycznym komnożeniem.

Zasadniczym rezultatem pracy byl opis grupoidu różniczkowego $\Gamma_C$ (por. wzory (9)), w szczególności kompletny opis jego orbit i grup izotropii. $C^*$-algebra grupoidu $\Gamma_C$ "winna być" $C^*$-algebrą grupy dwoistej do grupy $\kappa$-Poincaré . Opiszę teraz rozkład, który stoi za grupą $\kappa$-Poincaré (i grupą do niej dwoistą). Dlaczego grupa kwantowa związana z takim właśnie rozkład daje nam "kwantyzację" Grupy Poincaré opisałem w pracy (P8), tam również podałem bardziej geometryczne definicje grup $A$ i $C$.

Niech $G := SO_0(1, n+1)\,,\ n \geq 1$ będzie spójną składową grupy Lorentza, definiujemy następujące podgrupy $G$.
*Grupa $A$* jest niespójnym rozszerzeniem grupy $SO_0(1,n)$ wewnątrz $SO_0(1,n+1)$ (jest to normalizator $SO_0(1,n)$ w $SO_0(1,n+1)$) i jest zdefiniowana jako:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \,:\ u \in SO_0(1,n),\ h := \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\,,\ d = \pm 1 \right\}. \tag{17}$$

*Grupa $C$* jest dana przez:

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} \frac{s^2+1+|y|^2}{2s} & -\frac{1}{s}y^t & \frac{s^2-1+|y|^2}{2s} \\ -y & I & -y \\ \frac{s^2-1-|y|^2}{2s} & \frac{1}{s}y^t & \frac{s^2+1-|y|^2}{2s} \end{pmatrix} s \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}^n \right\} \subset G\,; \tag{18}$$

jest to grupa $(AN)$ w rozkładzie Iwasawy $SO_0(1.n+1) = SO(n+1)(AN)$; grupa ta jest izomorficzna z iloczynem półprostym $\mathbb{R}_+ \ltimes \mathbb{R}^n$ z mnożeniem $(s_1, y_1)(s_2, y_2) := (s_1 s_2, s_2 y_1 + y_2)$.

W pracy podany został jawny opis zbioru elementów rozkładalnych $\Gamma := AC \cap CA$ wraz z rzutami $a_L, a_R, c_L, c_R$ na $A$ i $C$ [(H3) Lem. 1]. Wykaz orbit grupoidu $\Gamma_C : \Gamma \rightrightarrows C$ zawiera [(H3) Prop. 1], a grupy izotropii zostały policzone w [(H3) Prop. 2].

Ponadto grupoid $\Gamma_C$ został zanurzuny w grupoid transformacyjny $\tilde{C} \times A$ poprzez konstrukcję rozmaitości $\tilde{C}$ z działaniem grupy $A$. Podano również jawny opis rozmaitości $\tilde{C}$ [(H3) Prop. 9].

## *On the quantum 'ax + b' group*

Jak wiadomo z pracy [46], nie tylko PGL definiują grupy kwantowe, jest też tak w sytuacji, gdy zbiór elementów rozkładalnych $\Gamma = AC \cap CA$ (notacja opisana we wstępie) jest "dostatecznie duży" (mówiąc bardziej precyzyjnie, gdy jest otwarty i pełnej miary w $G$). Niech $\tilde{m}_C$ oznacza relację mnożenia w grupoidzie $\Gamma_C : \Gamma \rightrightarrows C$. Podstawową przeszkodą w zastosowaniu "metod grupoidowych" jest fakt, że $\tilde{\delta} := \tilde{m}_C^T : \Gamma_A \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright\, \Gamma_A \times \Gamma_A$ *nie jest morfizmem grupoidów* i zamiast równości

$$\tilde{m}_C^T m_A = (m_A \times m_A)(id \times \sim \times id)(\tilde{m}_C^T \times \tilde{m}_C^T)) \tag{19}$$

mamy jedynie zawieranie $\tilde{m}_C^T m_A \supset (m_A \times m_A)(id \times \sim \times id)(\tilde{m}_C^T \times \tilde{m}_C^T)$. Jeżeli jednak różnica między dwiema stronami powyższego zawierania jest "mała", można mieć nadzieję, że po "podniesieniu" obiektów grupoidowych na poziom operatorów w przestrzeni Hilberta odpowiednie równości będą zachodzić. Ta idea była myślą przewodnią omawianej pracy. Właśnie z tego typu sytuacją mamy do czynienia w opisanej powyżej grupie Lorentza $SO_0(1, n)$ i, w najprostszym przypadku, w grupie 'ax+b'. *Ponieważ dalej będę mówił tylko o przykładzie (kwantowej) grupy 'ax+b' opisanej przez Baaja i Skandalisa w [35, 4] (a także w [46]), a grupa opisana przez Woronowicza i Zakrzewskiego w [51] nie będzie się pojawiać, będę przykład Baaja i Skandalisa nazywał po prostu* kwantową grupą 'ax+b'.

Wyniki otrzymane w tej pracy są dwojakiego rodzaju, z jednej strony analiza przykładu kwantowej grupy 'ax+b', z drugiej sformułowanie pewnych ogólnych warunków (choć nie do końca zadowalających), których spełnienie pozwala zastosować metody grupoidowe i opisać otrzymane grupy kwantowe jako "skręcone" wersje grup zadanych przez PGL i opisanych w (H2). Wspólną bowiem cechą struktury stojącej za kwantową grupą 'ax+b' i grupą $\kappa$-Poincaré jest istnienie, niejako "tuż obok"', struktury PGL. Tym rozkładem jest w grupie 'ax+b' rozkład na translacje i stabilizator dowolnego punktu, a w grupie Lorentza jest to rozkład Iwasawy.

Istnienie tego pełnego rozkładu, w świetle pracy (H2), nasuwa pomysł "przepchnięcia" całej struktury do grupoidu związanego z PGL. Jego realizacja doprowadziła mnie do zidentyfikowania obiektu $T$ - twistu, zdefiniowanego poniżej (22), zbadania jego własności algebraicznych (Stw. 4.1) a następnie dodania pewnych założeń analitycznych w przypadku PGL zawartch w Tw. 4.2. Omówię najpierw sytuację ogólną a następnie zastosowanie do grupy 'ax+b'.

Niech dana będzie grupa $G$ i trzy jej podgrupy $A, B, C \subset G$ spełniające warunki:

$$B \cap C = \{e\} = A \cap C \quad , \qquad BC = G, \tag{20}$$

(czyli $(G; B, C)$ jest grupą podwójną). W tej sytuacji mamy grupoid $G_B : G \rightrightarrows B$ oraz $\Gamma_A : \Gamma \rightrightarrows A$ ($\Gamma := AC \cap CA$). Grupoid $G_B$ jest wyposażony w kołączny morfizm $\delta_0 := m_C^T :$

$G_B \longrightarrow\!\!\triangleright G_B \times G_B$, gdzie $m_C$ jest mnożeniem w grupoidzie $G_C : G \rightrightarrows C$. Grupoid $G_B$ jest izomorficzny z grupoidem transformacyjnym $(C\backslash G) \times C$ (z kanonicznym prawym działaniem $(C\backslash G) \times C \ni ([g], c) \mapsto [gc] \in (C\backslash G))$, natomiast $\Gamma_A$ można utożsamić z *obcięciem tegoż grupoidu do pewnego podzbioru*, który (po utożsamieniu $B \simeq (C\backslash G)$ jest zdefiniowany jako

$$B' := B \cap CA, \tag{21}$$

$\Gamma_A$ jako obcięcie $G_B$ będzie oznaczany przez $\Gamma_{B'}$. Po zanurzeniu $\Gamma_A$ w $G_B$ możemy relację $\tilde{m}_C^T$ (czyli "prawie" morfizm, który "powinien" zadawać komnożenie) traktować jako relację $G_B \longrightarrow\!\!\triangleright G_B \times G_B$. Zdefiniujmy następujący zbiór:

$$T := \{(g, b) : c_R(g)b \in A\} \subset G_B \times G_B, \tag{22}$$

gdzie $c_R : G \to C$ jest rzutem związanym z rozkładem $G = BC$ jak w (8). Najważniejsze własności tego zbioru opisuje poniższe:

**Stwierdzenie 4.1** [(H4) Prop. 3.1, Lemma 3.2]

1. *$T$ jest cięciem lewego i prawego rzutu (w $G_B \times G_B$) nad zbiorem $B \times B'$ oraz bicięciem $G_B \times \Gamma_{B'}$; w związku z tym lewe mnożenie przez $T$ zadaje bijekcję $G_B \times b_L^{-1}(B')$.*
2. *Oznaczmy $T_{12} := T \times B \subset G_B \times G_B \times G_B$ oraz $T_{23} := B \times T \subset G_B \times G_B \times G_B$. Ma miejsce równość zbiorów:*
$$T_{23}(id \times \delta_0)T = T_{12}(\delta_0 \times id)T$$
3. *Zdefiniujmy relację $Ad_T : G_B \times G_B \longrightarrow\!\!\triangleright G_B \times G_B$ jako:*
$$(g_1, g_2; g_3, g_4) \in Ad_T \iff \exists t_1, t_2 \in T : (g_1, g_2) = t_1(g_3, g_4)(s_B \times s_B)(t_2).$$
*Relacja $\delta := Ad_T \cdot \delta_0$ jest rozszerzeniem $\tilde{m}_C^T$, tzn $\tilde{m}_C^T \subset \delta$*

■

Znaczenie tego zbioru opisuje główny rezultat z "ogólnej" części tej pracy:

**Twierdzenie 4.2** [(H4) Lemma 3.4, Prop. 3.5] *Niech $G$ będzie grupą Liego a $A, B, C \subset G$ domkniętymi podgrupami spełniającymi warunki (20). Załóżmy ponadto, że*

1. *Zbiór $\Gamma := CA \cap AC$ jest otwarty i gęsty w $G$.*
2. *Niech $U := b_L^{-1}(B')$ oraz $\mathcal{A}(U)$ oznacza przestrzeń wektorową elementów z $\mathcal{A}(G_B)$ o nośnikach zawartych w $U$. Zakładamy, że $\mathcal{A}(U)$ jest gęste w $C_r^*(G_B)$.*
3. *Dla zbioru zwartego $K_C \subset C$, zbioru otwartego $V \subset B$ oraz $(b_1, b_2) \in B \times B'$ zdefiniujmy zbiór $Z(b_1, b_2, K_C; V) := K_C \cap \{c \in C : b_R(b_1 c)b_2 \in V\}$ oraz funkcję :*
$$B \times B' \ni (b_1, b_2) \mapsto \mu(b_1, b_2, K_C; V) := \int_{Z(b_1, b_2, K_C; V)} d_l c.$$
*Dla zbiorów zwartych $K_1 \subset B$ and $K_2 \subset B'$ definiujemy*
$$\mu(K_1, K_2, K_C; V) := \sup\{\mu(b_1, b_2, K_C; V) : b_1 \in K_1 \, , \, b_2 \in K_2\}$$
*i zakładamy, że*
$$\forall \epsilon > 0 \, \exists V - \text{ otoczenie} \, B \setminus B' \, \text{w B} \, : \, \mu(K_1, K_2, K_C; V) \leq \epsilon \tag{23}$$

*Wtedy*

1. $C_r^*(\Gamma_{B'}) = C_r^*(G_B)$
2. *Odwzorowanie* $T : \mathcal{A}(G_B \times U) \to \mathcal{A}(G_B \times U)$*, zadawane przez lewe mnożenie przez podzbiór (w tym wypadku podrozmaitość)* $T$ *zdefiniowany w (22), rozszerza się do unitarnego* $\widehat{\mathcal{T}} \in M(C_r^*(G_B) \otimes C_r^*(G_B))$*, który spełnia równanie:*

$$(\widehat{\mathcal{T}} \otimes I)(\Delta_0 \otimes id)\widehat{\mathcal{T}} = (I \otimes \widehat{\mathcal{T}})(id \otimes \Delta_0)\widehat{\mathcal{T}}$$

3. *Wzór* $\Delta(a) := \widehat{\mathcal{T}}\Delta_0(a)\widehat{\mathcal{T}}^{-1}$ *zadaje kołączny morfizm* $\Delta \in Mor(C_r^*(G_B), C_r^*(G_B) \otimes C_r^*(G_B))$*; morfizm ten spełnia warunki gęstości (3).*

■

Ten ogólny schemat był następnie zastosowany do grupy 'ax+b'. Ta grupa, czyli grupa afinicznych przekształceń prostej rzeczywistej, utożsamiona jest tutaj z iloczynem półprostym $G := \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_*$ $(\mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\})$ z działaniem $(b_1, a_1)(b_2, a_2) := (b_1 + a_1 b_2, a_1 a_2)$. Podgrupy $A, B, C$ są zdefiniowane jako:

$$B := \{(b,1)\,,\, b \in \mathbb{R}\}\,,\ C := \{(c-1,c)\,,\, c \in \mathbb{R}_*\}\,,\ A := \{(0,a)\,,\, a \in \mathbb{R}_*\}$$

i spełniają one założenia Tw. 4.2. Ponadto podane zostały generatory $C^*$-algebry kwantowej grupy 'ax+b' [(H4) Prop. 5.2], a także twist $\widehat{\mathcal{T}}$ został wyrażony jako funkcja od generatorów [(H4) Lem. 5.6], zostało opisane także, w jakim sensie kwantowa grupa 'ax+b' jest kwantyzacją struktury Poissona-Liego na klasycznej grupie 'ax+b' [(H4) Props. 6.3, 6.7].

## *The $\kappa$-Poincaré Group on a $C^*$-level.*

Głównym celem tej pracy było wykazanie, że kwantowa grupa $\kappa$-Poincaré pasuje do schematu podanego w pracy (H4), opisanie $C^*$-algebry i komnożenia dla tej grupy i porównanie z relacjami dla $*$-algebry Hopfa podanymi w [58].

Używam oznaczeń spójnych z Tw.4.2 i opisem pracy (H3). Grupa $G := SO_0(1, n+1)\,,\, n \geq 1$ jest spójną składową grupy Lorentza; grupa $A$ jest niespójnym rozszerzeniem $SO_0(1,n)$ zdefiniowanym w (17); grupa $C$, zdefiniowana w (18), jest grupą $AN$ w rozkładzie Iwasawy $SO_0(1, n+1) = SO(n+1)(AN)$ a grupa $B := SO(n+1)$.

Pierwszym zadaniem była weryfikacja założeń Tw.4.2. Zostało to dokonane, być może niezbyt elegancko, przez szczegółową analizę struktury grupoidu $G_B : G \rightrightarrows B$ związanego z rozkładem Iwasawy [(H5) Lemmas 2.4, 3.2], co dało rezultat w postaci równości $C_r^*(\Gamma_A) = C_r^*(G_B)$ oraz komnożenia zadanego przez twist [(H5) Theorem 3.1].

Następnie podane zostały generatory i relacje, jakie spełniają. Zarówno ogólne wzory dla $C^*$-algebr związanych z PGL w terminach reprezentacji dołączonej [(H5) Prop. 4.3], jak ich konkretna postać dla omawianej grupy; podobnie ze wzorami na komnożenie [(H5) sections 4.3, 4.4]; wreszcie została podana ogólna formuła na twist (przy dodatkowym założeniu, że grupa $C$ jest wykładnicza) [(H5) Prop. 4.6] i jej szczególna postać dla $\kappa$-Poincaré.

W celu porównania z relacjami podanymi w [58] trzeba było wrócić do opisu związanego z grupoidem $\Gamma_A : \Gamma \rightrightarrows A$, a następnie zidentyfikować odpowiedniość między generatorami w obu zestawach wzorów, co wymagało obliczenia działania unitarnej części antypodu na generatory; by nie zwiększać objętości pracy (która i tak całkowicie pomija formuły na antypod i miarę Haara), rachunki te zostały ukryte a ich wyniki przedstawione w algebraicznej postaci [(H5) Lemma 5.1].

Wreszcie ostatnia część jest poświęcona działaniu grupy kwantowej $C^*_r(G_B)$ związanej z PGL $(G; B.C)$ na "kwantowej przestrzeni" opisanej przez $C^*_r(C)$ i sytuacji dla $\kappa$-Poincaré . Opisuję tam, jak "spojrzenie grupoidowe" prowadzi do naturalnego działania i dlaczego to działanie jest "kwantyzacją" odpowiedniego działania grupy klasycznej. Ten rozdział nie jest zamknięty i pytanie, czy rzeczywiście (i w jakim sensie) dostajemy działanie grupy kwantowej, wymaga zbadania.

Rezultaty tej pracy mają pewne nieoczekiwane i nie do końca rozumiane przeze mnie aspekty. Równość $C^*_r(\Gamma_A) = C^*_r(G_B)$ mówi, że "przestrzeń kwantowa" tej grupy jest taka sama, jak grupy kwantowej związanej z grupoidem $G_B$, która winna być nazwana grupą $\kappa$-Euklidesową i uważana za (pewną) kwantową deformację grupy euklidesowej; jest tak z powodów analogicznych do zaprezentowanych w (P8). Nie jest to tak zadziwiające, jakby się na pierwszy rzut oka wydawało, gdy uświadomimy sobie, że "tak naprawdę" kwantujemy nie spójną składową grupy Poincaré , ale jej niespójne rozszerzenie, które w wymiarze fizycznym $1+3$ zawiera odbicie czasowe, jak to zostało opisane w (P8), a grupa $B = SO(n+1)$ jest uzwarceniem naszej niespójnej i niezwartej grupy $A$. W związku z tym, wydaje się, że np. elementy macierzowe (właściwej) grupy Lorentza w podstawowej reprezentacji, choć są stowarzyszone z $C^*_r(\Gamma_A)$, nie są generatorami (kwantowej) grupy Poincaré , ale jedynie pewne ich kombinacje, które przedłużają się do funkcji ciągłych na $B$ po zanurzeniu $A \hookrightarrow B$. Z drugiej strony komnożenie, które wyraża się prostym wzorem algebraicznym dla tychże elementów macierzowych, wyraża się wzorami dosyć skomplikowanymi dla generatorów.

Zanurzenie grupoidu $\Gamma_A \hookrightarrow G_B$, które w zasadzie dokonuje się przez zanurzenie $A \hookrightarrow B$, pozwala rozwiązać następujący problem: w grupoidach definiowanych przez PGL $(G; B, C)$, cięcia algebroidu Liego grupoidu $G_B$ możemy interpretować jako samosprzężone elementy stowarzyszone z $C^*_r(G_B)$, dla których $\mathcal{A}(G_B)$ stanowi dziedzinę istotną i które (pomijając problem pełna czy zredukownana algebra) są pośród generatorów $C^*$-algebry. Dla grupoidu $\Gamma_A$ odpowiednie pola wektorowe *są niezupełne*, zatem odpowiadające im operatory symetryczne *nie są* istotnie samosprzężone na "naturalnej dziedzinie" $\Omega^{1/2}_c(\Gamma_A)$. Zanurzenie $\Gamma_A \hookrightarrow G_B$ pozwala wybrać dziedzinę, czyli $\Omega^{1/2}_c(G_B)$, na której te operatory już są istotnie samosprzężone.

## 5. Pozostałe osiągnięcia naukowo - badawcze

Pozostałe prace:

(P1) *Bicovariant Differential Calculi on $S_\mu U(2)$ Group*, Lett Math Phys **25** (1992), 175-188, (praca magisterska);

(P2) *Double Lie Algebras and Manin triples*, arXiv:q-alg/9712040;

(P3) *Poisson-Lie structures on Poincaré and Euclidean groups in three dimensions*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 4555-4564;

(P4) *$C^*$-algebra of a differential groupoid*, Poisson Geometry, Banach Center Publ. **51** (2000), 263-281, (skrócona rozprawa doktorska, pełna wersja w archiwum: arXiv:math/9905097);

w tym po doktoracie:

(P5) M.R. Buneci, P. Stachura, *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems*, arXiv:math/0511613;

(P6) J. Wojtkiewicz, W. Pusz, P. Stachura, *Operator Reflection Positivity Inequalities and their applications to interacting quantum rotors*, Rep. Math. Phys. **77** (2016), 183-201;

(P7) D. R. Dalton, M. A. Sławiński, P. Stachura, T. Stanoev, *Sensitivity of Love and quasi-Rayleigh waves to model parameters*, Q. J. Mech. Appl. Math. **70 (2)** (2017), 103-130;

(P8) *On Poisson structures related to $\kappa$ Poincaré Group* Int. J. Geom. Methods M. **14** (2017), 1750133;

(P9) J. Wojtkiewicz, W. Pusz, P. Stachura, *Bogolyubov inequality for the ground state and its application to interacting rotor systems*, Rep. Math. Phys. **80** (2017), 233-253;

(P10) *Short and biased introduction to groupoids*, J. Knot Theor. Ramif. **27(7)** (2018), 1841010.

Praca (P1) to moja praca magisterska; praca (P2) omawia rozkłady "typu Iwasawy" na algebrach Liego grup $SO(p,q)$ i ich związek z pewnymi strukturami bialgebry na iloczynie półprostym tych algebr przez przestrzeń wektorową; w pracy tej po raz pierwszy (o ile mi wiadomo) pojawił się rozkład grupy $SO_0(1,n)$, który stoi za grupą $\kappa$-Poincaré. Praca (P3) przedstawia kompletną listę struktur Poissona-Liego na Grupie Euklidesowej i Grupie Poincaré w trzech wymiarach. Z nie do końca dla mnie jasnych powodów najliczniej cytowana z moich prac (15 cytowań, bez autocytowań, ostatnie w roku 2019). Praca (P4) to skondensowana wersja mojego doktoratu, pełna wersja spoczywa w archiwum. Omówię teraz prace po doktoracie.

### *Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems*

W tej pracy pokazano, jak pojęcie morfizmu grupoidów różniczkowych, wprowadzone przez S. Zakrzewskiego w [56] i używającą tego pojęcia konstrukcję z pracy (P4) uniwersalnej $C^*$-algebry grupoidu różniczkowego, rozszerzyć na grupoidy topologiczne z wybranymi *systemami Haara.* Grupoidy, które rozważaliśmy były $\sigma$-zwarte, lokalnie zwarte, Hausorffa oraz, *ponieważ zakładaliśmy istnienie systemu Haara*, rzuty na zbiór jedności były otwarte. Przypomnę, że system Haara (lewy) na grupoidzie $\Gamma \rightrightarrows \Gamma^{(0)}$ to rodzina $\lambda := \{\lambda^x\,,\, x \in \Gamma^{(0)}\}$ (dodatnich) miar Radona na lewych włóknach, która jest lewoniezmiennicza, tzn. dla każdego $x \in \Gamma$ z $a := e_L(x)$ , $b := e_R(x)$: $\displaystyle\int f(xy)d\lambda^b(y) = \int f(y)d\lambda^a(y)$ i ciągła, tzn. dla $f \in C_c(\Gamma)$ funkcja $\Gamma^{(0)} \ni a \mapsto \int f(y)d\lambda^a(y)$ jest ciągła. Przypomnę też definicję działania grupoidu na zbiorze:

**Definicja 6.1** *Niech $\Gamma \rightrightarrows \Gamma^{(0)}$ będzie grupoidem a $X$ zbiorem. Grupoid $\Gamma$ działa na $X$ jeżeli*

1. *Dane jest odwzorowania $\rho : X \to \Gamma^{(0)}$, niech $\Gamma *_\rho X := \{(\gamma, x) \in \Gamma \times X : e_R(\gamma) = \rho(x)\}$,*
2. *Dane jest odwzorowanie $\phi : \Gamma *_\rho X \to X$,*
3. *Spełnione są warunki: (a) $(\gamma, x) \in \Gamma *_\rho X \Rightarrow \rho(\phi(\gamma, x)) = e_L(\gamma)$, (b) $x \in X \Rightarrow \phi(\rho(x), x) = x$, (c) $\left[(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^{(2)}, (\gamma_2, x) \in \Gamma *_\rho X\right] \Rightarrow \phi(\gamma_1\gamma_2, x) = \phi(\gamma_1, \rho(\phi(\gamma_2, x)))$*

Ważną rolę pełniła obserwacja, że morfizm Zakrzewskiego, $h : \Gamma_1 \longrightarrow\!\!\triangleright\, \Gamma_2$, może być opisany jako działanie grupoidu $\Gamma_1$ na $\Gamma_2$, które jest przemienne z mnożeniem (z prawej strony) w $\Gamma_2$. Ponieważ warunek ciągłości działania można sformułować bardzo naturalnie i prosto, dostaje się w ten sposób pojęcie morfizmu dla grupoidów topologicznych. Jeżeli $(\Gamma, \lambda)$ i $(G, \nu)$ są grupoidami z wybranymi systemami Haara, ich morfizm jest zdefiniowany jako morfizm grupoidów topologicznych, który jest w pewien sposób zgodny z parą $(\lambda, \nu)$ [(P5), Def. 7]; dowodzimy, że grupoidy topologiczne ($\sigma$-zwarte, lokalnie zwarte, Hausdorffa) z wybranymi systemami Haara tworzą kategorię [(P5) Prop. 15]. Tak zdefiniowane morfizmy działają na elementy algebry grupoidowej (funkcje ciągłe o zwartym nośniku ze splotem) i konstrukcja ta prowadzi do funktora przypisującego grupoidowi topologicznemu ($\sigma$-zwartemu, lokalnie zwartemu, Hausdorffa) rodzaj uniwersalnej $C^*$-algebry.

Z powodu pewnych nieporozumień między autorami praca pozostała w archiwum, jednak żyje jakoś w tej formie i jest czasem cytowana (wg WoS 7 cytowań, bez autocytowań, ostatnie w 2018r).

## *Operator Reflection Positivity Inequalities and their applications to interacting quantum rotors.*

Praca z kwantowej mechaniki statystycznej. Jej celem było wykazanie występowania długozasięgowego porządku dla układu dwuwymiarowych rotorów na sieci przy założeniu dostatecznie silnego oddziaływania między rotorami. Jednym z kluczowych narzędzi było uogólnienie klasycznej nierówności macierzowej Kennedy-Lieb-Shastry [19] na operatory Hilberta-Schmidta w ośrodkowych przestrzeniach Hilberta.

**Twierdzenie 6.2** [ (P6) Theorem 2.3] *Niech $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ będą ośrodkowymi przestrzeniami Hilberta a $A \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ operatorami ograniczonymi. Niech, ponadto, $c : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ będzie operatorem Hilberta-Schmidta oraz $|c| := \sqrt{c^*c}$ i $|c^*| := \sqrt{c\,c^*}$. Wtedy*

1. *$|c|$ oraz $|c^*|$ są hermitowskimi operatorami na $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ ;*
2. *$c^*BcA^*$, $|c|A|c|A^*$ są operatorami śladowymi na $\mathcal{L}$ a $|c^*|B|c^*|B^*$ jest operatorem śladowym na $\mathcal{R}$;*
3. *Zachodzi nierówność:*
$$|\mathrm{Tr}\ c^*\, B\, c\, A^*| \leq \frac{1}{2}\left[\,\mathrm{Tr}\ (|c|\, A\, |c|\, A^*) + \mathrm{Tr}\ (|c^*|\, B\, |c^*|\, B^*)\,\right] \tag{24}$$

■

Ta nierówność została następnie sformułowana w języku wartości oczekiwanych dla operatorów na $\mathcal{L} \otimes \mathcal{R}$ i w tej formie uogólniona na pewne operatory nieograniczone [(P6) Propositions 2.9 i 2.10].

Rozpatrywany układ fizyczny był zdefiniowany przez skończoną, sześcienną sieć $\Lambda$:

$$\Lambda := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d : -N + 1 \leq x_i \leq N \,,\, i = 1, \ldots, d\} \tag{25}$$

Z każdym węzłem sieci $\mathbf{x} \in \Lambda$ jest związany jeden (kątowy) stopień swobody $\varphi_{\mathbf{x}} \in [0, 2\pi[$ opisujący pozycję rotoru w węźle $\mathbf{x}$; równoważnie, położenie można opisać jednostkowym wektorem $\mathbf{s}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}$: $\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = [s^x_{\mathbf{x}}, s^y_{\mathbf{x}}] = [\cos\varphi_{\mathbf{x}}, \sin\varphi_{\mathbf{x}}]$. Przestrzeń stanów na węźle $\mathbf{x}$ jest dana jako $\mathcal{H}_{\mathbf{x}} = L^2(\mathbb{T})$ i przestrzeń Hilberta związana z całym układem jest równa $\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathcal{H}_{\mathbf{x}} = L^2(\mathbb{T}^{|\Lambda|})$

Hamiltonian układu oddziałujących rotorów jest dany przez $H = \mathrm{T} + \hat{V}$, gdzie $T$, operator energii kinetycznej, jest proporcjonalny do Laplasjanu na (płaskim) torusie $\mathbb{T}^{|\Lambda|}$: $\mathrm{T} = -\dfrac{1}{2I}\displaystyle\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2_{\mathbf{x}}}$, gdzie $I > 0$ jest stałą interpretowaną jako moment bezwładności rotoru. Oddziaływanie $\hat{V}$ jest operatorem mnożenia przez gładką funkcję $V_0 := -J\displaystyle\sum_{\langle\mathbf{xy}\rangle} \cos(\varphi_{\mathbf{x}} - \varphi_{\mathbf{y}})$, $J > 0$ jest stałą związaną z siłą oddziaływania a symbol $\langle\mathbf{xy}\rangle$ oznacza, że $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ są *najbliższymi sąsiadami* na sieci (sieć jest interpretowana jako sieć na torusie).

Nierówność (24) została następnie, w formie sformułowanej w [(P6) Propositions 2.9 i 2.10], wraz z symetrią sieci $\Lambda$ wykorzystana do wykazania następującego

**Twierdzenie 6.3** [ (P6) Theorem 3.5] *Dla funkcji $b : \Lambda \ni \mathbf{x} \mapsto b_{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}$ rozważmy hamiltonian $H(b) := \mathrm{T} + V(b)$, gdzie*

$$V(b) = \frac{J}{2}\sum_{\langle\mathbf{xy}\rangle}\left[|\cos\varphi_{\mathbf{x}} - b_{\mathbf{x}} - \cos\varphi_{\mathbf{y}} + b_{\mathbf{y}}|^2 + (\sin\varphi_{\mathbf{x}} - \sin\varphi_{\mathbf{y}})^2\right]$$

*Niech $E_0(b)$ oznacza energię stanu podstawowego operatora $H(b)$. Prawdziwa jest nierówność: $E_0(b) \geq E_0(0) =: E_0$* ∎

Operator całkowitego spinu jest dany jako $\mathbf{S} := \displaystyle\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathbf{s}_{\mathbf{x}}$, a jako miara uporządkowania jest użyta średnia wartość w stanie podstawowym (jak dowodzimy, jest on jedyny w rozpatrywanym przypadku) kwadratu gęstości (składowej) całkowiego spinu czyli $\left\langle\psi_0 \,|\, (|\Lambda|^{-1}\mathbf{S}^x)^2\psi_0\right\rangle$. Twierdzenie 6.3 zostało wykorzystane do otrzymania głównego (z punktu widzenia fizycznego) wyniku pracy:

**Twierdzenie 6.4** [ (P6) Theorem 3.3] *Załóżmy, że stałe $I, J$ spełniają nierówność*

$$\sqrt{IJ} > \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{\mathsf{dk}}{\sqrt{\mathcal{E}(\mathbf{k})}}\,,\ \text{gdzie } \mathcal{E} : \mathbb{R}^d \ni (\mathbf{k}) \mapsto \mathcal{E}(\mathbf{k}) = d - \sum_{i=1}^{d}\cos k_i \in \mathbb{R},$$

*Wtedy istnieje $C > 0$ takie, że dla dostatecznie dużych $|\Lambda|$ zachodzi nierówność*

$$\left\langle\psi_0 \,|\, (|\Lambda|^{-1}\mathbf{S}^x)^2\psi_0\right\rangle \geq C,$$

∎

Ponieważ powyższa całka jest rozbieżna w wymiarze $d = 1$, twierdzenie daje występowanie porządku dla $d \geq 2$; przy czym dla $d \geq 3$ było to wiadome uprzednio [33]. Zatem wynik jest nowy dla $d = 2$, a dla $d > 2$ daje inny sposób uzyskania znanych rezultatów.

## *Sensitivity of Love and quasi-Rayleigh waves to model parameters.*

Praca z zastosowań w sejsmologii, niewiele (wyrażając się nieco eufemistycznie) wnosząca w rozwój matematyki. Badane były dwa typy fal elastycznych (fale Love'a i odpowiedniki fal Rayleigha) w ośrodku spełniającym prawo Hooke'a składającym się z warstwy i leżącej pod nią półprzestrzeni. Badaliśmy wrażliwość różnych obserwowanych charakterystyk fal (krzywych dyspersji) na parametry ośrodka; w szczególności dobór optymalnej częstości dla wyznaczenia grubości warstwy. Praca była wykorzystana w obliczeniach numerycznych [5]. Ubocznym efektem okazało się wykrycie kilku błędów we wzorach zamieszczonych w szeroko używanym podręczniku z sejsmologii teoretycznej [44].

## *On Poisson structures related to $\kappa$ Poincaré Group*

W pracy pokazuję, jaka geometryczna sytuacja leży u podstaw struktury Poissona-Liego stojącej za grupą $\kappa$-Poincaré a także związaną z nią strukturę Poissona na (afinicznej) przestrzeni Minkowskiego. Pokazuję także, dlaczego $C^*$-algebra grupoidu $\Gamma_A : \Gamma \rightrightarrows A$, gdzie $\Gamma = AC \cap CA$ a grupy $A$ i $C$ zdefiniowane są w (17,18) powinna być uważana za kwantyzację Grupy Poincaré.

Punktem wyjścia jest (wektorowa) przestrzeń Minkowskiego $(V, \eta), dim(V) > 3$ i spójna składowa grupy Lorentza $G := SO_0(\eta)$. Przez Grupę Poincaré, dalej skracaną do GP, rozumiem grupę *afinicznych* przekształceń $V$ zachowujących $\eta$ i zawierającą translacje oraz grupę $G$. Jej spójna składowa, *właściwa* GP, to iloczyn półprosty $V \rtimes G$; *pełna* GP ma 4 składowe i jest równa $V \rtimes O(\eta)$; mamy też "pośrednie" GP, które zawierają odbicie czasowe, przestrzenne lub ich złożenie.

GP może być zrealizowana jako podgrupa $T^*G$, którą, przez prawe przesunięcia, możemy utożsamić z iloczynem półprostym $\mathfrak{g}^* \rtimes G$ (z działaniem kodołączonym). Jeżeli $H \subset G$ jest podgrupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{h}$ to $\mathfrak{h}^0 \rtimes H$ jest podgrupą w $\mathfrak{g}^* \rtimes G$. Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest wyposażona kanoniczną, niezdegenerowaną formę dwuliniową (formę Killinga) i możemy jej użyć do zdefiniowania formy na $\mathfrak{g}^*$. Jeżeli wybierzemy w $V$ pewien przestrzenny wektor $\mathbf{s}$ i oznaczymy przez $\tilde{A}$ jego stabilizator w $G$ a przez $\mathfrak{a}$ algebrę Liego $\tilde{A}$, to grupa $\mathfrak{a}^0 \rtimes \tilde{A}$ jest właściwą GP (w wymiarze o 1 niżej). Jeżeli zdefiniujemy $A$ jako stabilizator *kierunku* wyznaczonego przez $\mathbf{s}$ otrzymamy (po wyborze odpowiedniej bazy w $V$) grupę zdefiniowaną w (17) i odpowiednią GP: $\mathfrak{a}^0 \rtimes A$

Okazuje się, że wybór *czasowego* wektora $\mathbf{t}$ ortogonalnego do $\mathbf{s}$ definiuje nam podalgebrę $\mathfrak{c}$, która jest algebrą Liego grupy (znowu po wyborze bazy) $C$ zdefiniowanej w (18). Teraz $\mathfrak{a}^0 \rtimes A$ jest w naturalny sposób dualne do algebroidu Liego grupoidu $\Gamma_A$, czyli jest wyposażone w kanoniczną strukturę Poissona, która jest strukturą Poissona-Liego. Zgodnie z [22] $C^*$-algebra tego grupoidu winna być uważana za "kwantyzację" tejże grupy (Poissona-Liego).

*Bogolyubov inequality for the ground state and its application to interacting rotor systems*

Kolejna wycieczka w kierunku kwantowej mechaniki statystycznej na sieci. Głównym matematycznym rezultatem jest uogólnienie klasycznej, zerotemperaturowej nierówności Bogoliubowa [15] na pewne klasy operatorów nieograniczonych. Nierówność ta miała być następnie użyta do celu przeciwnego niż w pracy (P6), mianowicie do *wykazania braku długozasięgowego uporządkowania*, w przypadku słabych oddziaływań, w układzie kwantowych rotorów na sieci. Cel ten udało się zrealizować połowicznie; ponieważ w nierówności (31) występuje *przerwa energetyczna* (różnica energii między stanem podstawowym a pierwszym stanem wzbudzonym), co jest cechą skończonych sieci ale nie jest oczywiste w granicy termodynamicznej (mówiąc bardziej precyzyjnie, nie jest wiadome, czy istnieje $C > 0$ takie, że w granicy termodynamicznej przerwa energetyczna jest nie mniejsza niż $C$), udało się jedynie wykazać brak długozasięgowego porządku, *o ile występuje przerwa energetyczna w granicy termodynamicznej.*

**Klasyczna nierówność Bogoliubowa w temperaturze 0 [15]**. Niech $\mathcal{H}$ będzie *skończenie wymiarową* przestrzenią Hilberta a $\mathrm{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatorem samosprzężonym (możemy myśleć o nim, i tak bywa w zastosowaniach fizycznych, jako o hamiltonianie układu). Wtedy, dla dowolnych $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zachodzi nierówność:

$$|\langle [A,B]\rangle_0|^2 \leq \frac{1}{\Delta}\langle [B,[H,B^\dagger]]\rangle_0 \langle A^\dagger A + AA^\dagger\rangle_0 \tag{26}$$

W wyrażeniu powyżej: $\langle A\rangle_0 = \mathrm{Tr}\,(P_0 A P_0)$, gdzie $P_0$ jest rzutem na podprzestrzeń stanów o minimalnej energii $E_0$ (czyli najmniejszej wartości własnej H) oraz $\Delta := E_1 - E_0 > 0$ jest przerwą energetyczną (różnicą między dwiema najmniejszymi wartościami własnymi).

Nierówność powyższa jest prostym wnioskiem z nierówności Schwarza dla następującej nieujemnej formy półtoraliniowej na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$(A,B) := \frac{1}{Z}\sum_m \sum_\alpha \frac{(\alpha\,|\,A^\dagger m)(m\,|\,B\alpha) + (\alpha\,|\,Bm)(m\,|\,A^\dagger\alpha)}{E_m - E_0} \tag{27}$$

tutaj $\alpha$ numeruje wektory własne H o najmniejszej wartości własnej $E_0$, $m$ numeruje pozostałe wektory własne oraz $Z := \sum_\alpha (\alpha\,|\,\alpha) = \mathrm{Tr}\,(P_0)$.

Omówię teraz uogólnienie nierówności (26) otrzymane w omawianej pracy. Niech H będzie samosprzężonym i ograniczonym z dołu operatorem ze zwartą rezolwentą w ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Ponumerujmy wartości własne H:

$$E_0 < E_1 < \cdots < E_n < \ldots \quad , \quad \lim_{n\to\infty} E_n = \infty$$

i niech $\mathrm{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n$ będzie rozkładem spektralnym H. Ustalmy H -niezmienniczą podprzestrzeń $\mathcal{S}_\mathrm{H} \subset \mathcal{H}$, taką że $P_n(\mathcal{H}) \subset \mathcal{S}_\mathrm{H}$ dla każdego $n = 0, 1, \ldots$ i zdefiniujmy zbiór operatorów:

$$\mathrm{Op}(\mathcal{S}_\mathrm{H}) := \{C \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_\mathrm{H}, \mathcal{H}) : \mathcal{S}_\mathrm{H} \subset D(C^*)\} \tag{28}$$

Dla operatora $C \in \mathrm{Op}(\mathcal{S}_\mathrm{H})$ definiujemy $C^\dagger := C^*|_{\mathcal{S}_\mathrm{H}}$, wtedy $C^\dagger \in \mathrm{Op}(\mathcal{S}_\mathrm{H})$ oraz $(C^\dagger)^\dagger = C$. Podprzestrzeń $\mathcal{S}_\mathrm{H}$ jest dziedziną istotną dla H (czyli $\mathrm{H} = \overline{(\mathrm{H}|_{\mathcal{S}_\mathrm{H}})}$) oraz $\mathrm{H}_0 := \mathrm{H}|_{\mathcal{S}_\mathrm{H}} \in \mathrm{Op}(\mathcal{S}_\mathrm{H})$, ponadto $\mathrm{H}_0^\dagger = \mathrm{H}_0$. Na $\mathrm{Op}(\mathcal{S}_{\mathrm{H}})$ definiujemy rodzinę form półtoraliniowych

$$\rho_{nk}(C,B) := \mathrm{Tr}(P_k C^* P_n B P_k) = \sum_{j=1}^{N_k} (Ce_j \,|\, P_n B e_j)\,, \quad n,k = 0,1,2,\ldots \tag{29}$$

gdzie $(e_j)$ jest dowolną bazą ortonormalną w $P_k(\mathcal{H}\,)$ ($N_k := \dim P_k(\mathcal{H}\,)$). Rolę formy (27) pełni teraz wyrażenie:

$$\mathrm{Op}(\mathcal{S}_{\mathrm{H}}) \times \mathrm{Op}(\mathcal{S}_{\mathrm{H}}) \ni (B,C) \mapsto (B,C)_0 := \sum_{n>0} \frac{1}{E_n - E_0} (\rho_{n0} + \rho_{0n})(B,C) \tag{30}$$

I zachodzi następujące twierdzenie ("nierówność Bogoliubowa"):

**Twierdzenie 6.5** [ (P9) Theorem 2.1] *Niech operatory $B, C \in \mathrm{Op}(\mathcal{S}_{\mathrm{H}})$ będą takie, że*

$$B^\dagger(\mathcal{S}_{\mathrm{H}}) \subset \mathcal{S}_{\mathrm{H}}\,,\; C(\mathcal{S}_{\mathrm{H}}) \subset S_{\mathrm{H}}\,,\; C^\dagger(\mathcal{S}_{\mathrm{H}}) \subset \mathcal{S}_{\mathrm{H}}.$$

*Zachodzi wtedy nierówność:*

$$|\mathrm{Tr}(P_0[C^\dagger, B^\dagger]P_0)|^2 \le \left( \frac{1}{E_1 - E_0} \sum_{j=1}^{N_0} (||Be_j||^2 + ||B^\dagger e_j||^2) \right) \mathrm{Tr}(P_0[C^\dagger, [\mathrm{H}_0, C]]P_0), \tag{31}$$

*gdzie $(e_j)$ jest dowolną bazą o.n w $P_0(\mathcal{H}\,)$.* ∎

Układ fizyczny był układem na sieci (25). W każdym węźle mieliśmy dwu- lub trójwymiarowy rotor, czyli przestrzeń Hilberta była albo $\mathcal{H}_\Lambda := L^2(\mathbb{T}^{|\Lambda|})$ albo $\mathcal{H}_\Lambda := L^2(S^2 \times \cdots \times S^2)$ ($|\Lambda|$ razy). Nierówność była następnie zastosowana dla operatora $\mathrm{H} = \mathrm{T} + V + \mathrm{H}_{int}$, gdzie T był (z dokładnością do czynnika) operatorem Laplace'a na zwartej rozmaitości Riemanna $M$ (torus lub produkt dwuwymiarowych sfer) a $V$ i $\mathrm{H}_{int}$ były operatorami mnożenia przez funkcje. W przypadku sferycznych rotorów

$$V := \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} J_{\mathbf{xy}} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\mathbf{n_x}) \overline{Y_l^m(\mathbf{n_y})}\,, \quad J_{\mathbf{xy}} := J(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\,, \quad J(0) = 0, \tag{32}$$

gdzie $\mathbf{n_x} \in S^2$ oznacza położenie rotoru w węźle $\mathbf{x} \in \Lambda$ i $Y_l^m$ oznaczają harmoniki sferyczne; oddziaływanie $J : [0,\infty[ \to [0,\infty[$ zanika dostatecznie szybko: $\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d} J(|\mathbf{x}|)|\mathbf{x}|^2 < \infty$. Człon $\mathrm{H}_{int}$, wyróżnia kierunek w przestrzeni i opisuje oddziaływanie z zewnętrznym polem magnetycznym $\mathrm{H}_{int} := -h \sum_{\mathbf{x}} P_l(\cos\theta_{\mathbf{x}})$, gdzie $P_l$ jest wielomianem Legendre'a. Podobnego rodzaju człony występowały dla dwuwymiarowych rotorów.

Ponieważ oddziaływanie jest opisywane przez (operatory mnożenia przez) funkcje gładkie wiadomo, że H jest istotnie samosprzężony na $C^\infty(M)$, ma zwartą rezolwentę oraz gładkie wartości własne [32]; wobec czego można za $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}$ wziąć przestrzeń funkcji gładkich.

Za parametr opisujący uporządkowanie przyjęliśmy *magnetyzację*

$$m_\Lambda(h) := \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \psi_0 \,|\, \left( \sum_{\mathbf{x}} P_l(\cos\theta_{\mathbf{x}}) \right) \psi_0 \right\rangle,$$

gdzie $\psi_0$ jest (jak dowodzimy używając [11]) jedynym stanem podstawowym hamiltonianu H. Nierówność Bogolubowa, zastosowana do specjalnie dobranych operatorów [(P9) (24), (25), (35)] prowadzi do oszacowania na magnetyzację [(P9) Prop. 3.1]. Jak zaznaczyłem na wstępie, w tym oszacowaniu pojawia się przerwa energetyczna, które nie wiadomo, czy "przeżywa" przejście do granicy termodynamicznej $|\Lambda| \to \infty$.

## *Short and biased introduction to groupoids*

Praca z jednej strony przeglądowa, prezentująca algebraiczną część podejścia do grupoidów i ich morfizmów zapoczątkowaną przez S. Zakrzewskiego w [56], z drugiej zawierająca nowe obserwacje; w szczególności dotyczące formalnych własności kategorii grupoidów z morfizmami Zakrzewskiego oraz związek tych morfizmów z działaniami grupoidów i klasycznymi homomorfizmami grupoidów (czyli funktorami, gdy patrzymy na grupoidy jako na kategorie). Podaję wiele przykładów morfizmów a także pokazuję, że wiele znanych rezultatów z kategorii grup jest prawdziwych w kategorii grupoidów z morfizmami Zakrzewskiego. Poniżej przytoczę kilka z nich. Dla relacji $r : X \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright Y$ jej *dziedzinę* będę oznaczał przez $D(r) := \{x \in X : \exists y \in Y : (y,x) \in Gr(r)\}$ a *obraz* przez $Im(r) := \{y \in Y : \exists x \in X : (y,x) \in Gr(r)\} = D(r^T)$; morfizmy Zakrzewskiego zostały zdefiniowane w Def. 0.2.

**Definicja 6.6** [(P10) Def. 3.9] *Niech $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright \Delta$ będzie morfizmem grupoidów. Jądrem $h$ nazywamy zbiór $ker(h) := \{\gamma \in D(h) : (\delta,\gamma) \in Gr(h) \Rightarrow \delta \in \Delta^{(0)}\}$.*

W szczególności, jeżeli $\Gamma, \Delta$ są grupami, definicja ta pokrywa się z definicją jądra homomorfizmu grup; jądro morfizmu zawiera się w wiązce grup izotropii. Tak, jak w kategorii grup mamy kompletną charakteryzację monomorfizmów:

**Stwierdzenie 6.7** [(P10) Proposition 3.11] *Niech $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright \Delta$ będzie morfizmem grupoidów. $h$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $ker(h) = \Gamma^{(0)}$.* ∎

Podobnie jak w kategorii grup, epimorfizmy są surjekcjami:

**Stwierdzenie 6.8** [(P10) Proposition 3.13] *Jeżeli $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright \Delta$ jest epimorfizmem, to $h$ jest surjektywne (czyli $Im(h) = \Delta$).* ∎

Jednak, w przeciwieństwie do grup, nie jest to warunek wystarczający, oczywiście surjektywne *odwzorowania*, które są jednocześnie morfizmami są też epimorfizmami ale "bycie odwzorowaniem" nie jest konieczne. Natomiast, podobnie jak dla grup zachodzi twierdzenie o faktoryzacji:

**Stwierdzenie 6.9** [(P10) Proposition 4.18] *Niech $h : \Gamma \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright \Delta$ będzie morfizmem grupoidów. Istnieje groupoid $\tilde{\Gamma}$, epimorfizm $h_1 : \Gamma \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright \tilde{\Gamma}$ oraz monomorfizm $h_2 : \tilde{\Gamma} \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright \Delta$ takie, że $h = h_2 h_1$.* ∎

Klasyczna definicja działania grupoidu na zbiorze została przytoczona powyżej w Def. 6.1. Okazuje się, że jest ona równoważna [(P10) Proposition 4.4] następującej, formalnie identycznej z definicją działania grupy na zbiorze, definicji:

**Definicja 6.10** [(P10) Def. 4.3] *Niech $\Gamma \rightrightarrows E$ będzie grupoidem (z relacją mnożenia $m$) a $X$ zbiorem. Działaniem $\Gamma$ na $X$ nazywamy relację $\Phi : \Gamma \times X \longrightarrow\!\!\!\!\triangleright X$ spełniającą warunki*

$$\Phi(m \times id) = \Phi(id \times \Phi)\,,\ \Phi(e \times id) = id.$$

W pracy tej ponadto omówiłem związek morfizmów z działaniami, co po raz pierwszy zostało zauważone w (P5), a ponadto morfizm jako funktor pomiędzy kategoriami Γ-zbiorów, czyli zbiorów wyposażonych w działanie grupoidów (o ile mi wiadomo, spostrzegł to pierwszy R. Meyer). Dyskutuję też takie odpowiedniki pojęć związanych z grupami, jak przestrzenie jednorodne, tranzytywność i działania indukowane.

# Literatura


[1] A. Agostini, *κ-Minkowski representations on Hilbert spaces*, J. Math. Phys. **48** (2007), 052305.

[2] S. Baaj, G. Skandalis, *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de $C^*$-algèbres*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. $4^e$ série **26** (1993), 425-488.

[3] S. Baaj, *Représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz*, C. R. Acad. Sci. Paris **314**, série I (1992), 1021.

[4] S. Baaj, G. Skandalis, S. Vaes, *Non-semi-regular quantum groups coming from number theory*, Comm. Math. Phys. **235(1)** (2003), 139-167.

[5] A. Bogacz, T. Danek, K. Miernik, *Mini-expert Platform for Pareto Multi-objective Optimization of Geophysical Problem* w *Beyond Databases, Architectures and Structures. Facing the Challenges of Data Proliferation and Growing Variety*, Proceedings of 14th International Conference, BDAS 2018, Springer Nature Switzerland AG 2018.

[6] N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia, J. Kowalski-Glikman, *Deformed boost transformations that saturate at the Planck scale*, Phys. Lett. B **522** (2001), 133.

[7] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic press, San Diego, 1994.

[8] A. van Daele, *Multiplier Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), 917-932.

[9] A. van Daele, *Locally compact quantum groups: The von Neumann algebra versus the $C^*$-algebra approach*, Bull. of Kerala Math. Assoc. **3** (2006), 155–179.

[10] A. van Daele, *An Algebraic Framework for Group Duality*, Adv. Math. **140** (1998), 323-366.

[11] E. B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press, 2007.

[12] V. G. Drinfeld, *Quantum Groups*, Proc. of ICM, Berkeley, California, USA, 1986.

[13] B. Durhuus, A. Sitarz, *Star product realizations of κ-Minkowski space*, J. Noncommut. Geom. **7** (2013), 605–645.

[14] M. Enock, J-M. Schwartz, *Kac algebras an Duality of Locally Compact Groups*, Springer-Verlag 1992.

[15] Gang Su1, A.Schadschneider, J.Zittartz, *Absence of superconducting long-range order in low-dimensional Hubbard models*, Phys. Lett. A **230 (1-2)** (1977), 99-104.

[16] B. Iochum, T. Masson, T. Schücker, A. Sitarz, *Compact κ-deformation and spectral triples*, Rep. Math. Phys. **68(1)** (2011), 37-64.

[17] G. I. Kac, *Ring-groups and the principle of duality, I, II*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 291-339; **13** (1965), 94-126.

[18] G. Kac, V. Paljutkin, *Finite ring groups* , Trans. Moscow Math. Soc. **5** (1966), 251–294.

[19] T. Kennedy, E. H. Lieb, S. Shastry, *Existence of Néel Order in Some Spin-l/2 Heisenberg Antiferromagnets*, J. Stat. Phys. **53** (1988), 1019.

[20] M. G. Krein, *Hermitian-positive kernels in homogeneous spaces*, Amer. Math. Soc. Transl, Series 2 **34** (1963), 109-164; translated from Ukr. Mat. Z. **2(1)** (1950) 10-59.

[21] J. Kustermans, A. van Daele, *$C^*$-algebraic quantum groups arising from algebraic quantum groups*, Internat. J. Math. **8(8)** (1997), 1067 - 1139.

[22] N. P. Landsman, B. Ramazan, *Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids*, Contem. Math. **282** (2001), 159-192.

[23] J. H. Lu, A. Weinstein, *Poisson Lie Groups, Dressing Transformations and Bruhat Decomposition*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 501-526.

[24] J. Lukierski, *Kappa-deformations: historical developments and recent results*, J. Phys.: Conf. Ser. **804** (2017) 012028; także arXiv:1611.10213.

[25] J. Lukierski, A. Nowicki, *Double Special Relativity versus $\kappa$-deformation of relativistic kinematics*, Int. J. Mod. Phys. A **18 (01)** (2003), 7-18 .

[26] J. Lukierski, A Nowicki, H. Ruegg, *New quantum Poincaré algebra and $\kappa$-deformed field theory*, Phys. Lett. B **293** (1992), 344-352.

[27] S. Majid, *Physics for algebraists: Non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction*, J. Algebra **130** (1990), 17-64.

[28] S. Majid, *Hopf-von Neumann Algebra Bicrossproducts, Kac Algebra Bicrossproducts and Classical Yang-Baxter Equations*, J. Funct. Anal. **95** (1991), 291-319.

[29] S. Majid, H. Ruegg, *Bicrossproduct structure of $\kappa$-Poincaré group and non-commutative geometry*, Phys. Lett. B **334** (1994), 348-354.

[30] T Masuda, Y. Nakagami, S. L. Woronowicz, *$C^*$-algebraic framework for the duality of quantum groups*, Internat. J. Math. **14** (2003), 903 - 1001.

[31] A. Masuoka, *Classification of Semisimple Hopf Algebras*, in Handbook of Algebra **5**, edited by M. Hazewinikel, North-Holland (2008), 429-455.

[32] L. Nicolaescu, *Lectures on the Geometry of Manifolds*, World Scientifi,c 2007.

[33] L. A. Pastur, B. A. Khoruzhenko, *Phase Transitions in Quantum Models of Rotators and Ferroelectrics*, Theor. Math. Phys. **73** (1987), 1094.

[34] P. Podles, S. L. Woronowicz, *Quantum Deformation of Lorentz Group*, Comm. Math. Phys. **130**(1990), 381-431.

[35] G. Skandalis, *Duality for locally compact 'quantum groups'* (joint work with S. Baaj), Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Taungsbericht 46/1991, $C^*$-algebren,20, 10-26.10.1991, p. 20.

[36] P.M. Sołtan, S.L. Woronowicz, *A remark on manageable multiplicative unitaries*, Lett. Math. Phys. **57** (2001) 239–252.

[37] P.M. Sołtan, S.L. Woronowicz, *From Multiplicative Unitaries to Quantum Groups II*, J. Funct. Anal. **252** (2007), 42-67.

[38] P. Stachura, *Double Lie Algebras and Manin triples*, arXiv:q-alg/9712040.

[39] P. Stachura, *$C^*$-algebra of a differential groupoid*, Banach Center Publ. **51** (2000), 263-281; pełna wersja: *Differential groupoids and $C^*$-algebras*, math.QA/9905097.

[40] W. F. Stinespring, *Integration Theorems For Gages and Duality for Unimodular Groups*, Trans. of AMS **90(1)** (1959), 15-56.

[41] M. Takeuchi, *Matched pairs of groups and bismash products of hopf algebras*, Commun. Algebra **9 (8)** (1981), 841-882.

[42] T. Tannaka, *Über den Dualität der nicht-kommutativen topologischen Gruppen.* Tôhoku Math. **145** (1938) 1-12.

[43] N. Tatsuuma, *A duality theorem for locally compact groups*, J. Math. Kyoto Univ. **6(2)** (1967), 187-293.

[44] A. Udias, *Principles of Seismology*, Cambridge University Press, 1999.

[45] S. Vaes, J. Kustermans, *Locally compact quantum groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **33(6)** (2000), 837-934.

[46] S. Vaes, L. Vainerman, *Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossproduct construction*, Adv. Math. **175** (2003), 1-101.

[47] S. L. Woronowicz, *Twisted $S_\mu U(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus.*, Publications of RIMS Kyoto University **23** (1987), 117-181.

[48] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111(4)** (1987), 613–66.

[49] S. L. Woronowicz, *Compact Quantum Groups*, Les Houches, Session LXIV, 1995, Quantum Symmetries, Elsevier.

[50] S. L. Woronowicz, *From Multiplicative Unitaries to Quantum roups*, Internat. J. Math. **7**, No.1 (1996), 127-149.

[51] S. L. Woronowicz, S. Zakrzewski, *Quantum 'ax + b' Group*, Rev. Math. Phys. **14(7,8)** (2002), 797-828.

[52] S. L. Woronowicz, *Quantum E(2)-group and its Pontryagin dual*, Lett. Math. Phys. **23**(1991), 251-263.

[53] S L. Woronowicz, *$C^*$-algebras generated by unbounded elements*, Rev. Math. Phys. **7(3)** (1995), 481-521.

[54] S. L. Woronowicz, S. Zakrzewski, *Quantum Lorentz group having Gauss decomposition property*, Publ. RIMS, Kyoto University **28**(1992), 809-824.

[55] S. Zakrzewski, *Poisson structures on the Poincaré group*, Comm. Math. Phys. **185** (1997) 285 -311.

[56] S. Zakrzewski, *Quantum and Classical pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 347-370.

[57] S. Zakrzewski, *Quantum and classical pseudogroups. II. Differential and symplectic pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **134**, (1990), pp 371-395.

[58] S. Zakrzewski, *Quantum Poincaré group related to the $\kappa$ -Poincaré algebra*, J. Phys. A Math. Gen. **27** (1994) 2075-2082.

Piotr Stachura