

Annulateurs de Stickelberger des groupes de classes logarithmiques

par

JEAN-FRANÇOIS JAULENT (Bordeaux)

1. Introduction. Sous sa forme originelle, le classique théorème de Stickelberger (cf. e.g. [30]) affirme que pour tout corps abélien F_0 de groupe de Galois G_{F_0} , l'idéal \mathcal{S}_{F_0} de l'algèbre $\mathbb{Z}[G_{F_0}]$ engendré par les éléments de Stickelberger tordus annule le groupe des classes d'idéaux de F . Lorsque F est imaginaire, il est bien connu que ces éléments le sont aussi, en ce sens qu'ils se factorisent par $1 - \bar{\tau}$, où $\bar{\tau}$ désigne la conjugaison complexe. Il suit de là que ce théorème n'apporte aucune information *directe* sur le groupe des classes du sous-corps réel F^+ , lequel est banalement tué par $1 - \bar{\tau}$.

Pour aller plus loin, il est utile de fixer un nombre premier ℓ (que nous prendrons ici impair pour éviter les complications techniques liées au cas $\ell = 2$) et de se concentrer sur les ℓ -parties des groupes considérés. Dans cette perspective, il est naturel de raisonner en présence du groupe μ_ℓ des racines ℓ -ièmes de l'unité en remplaçant le corps de départ par le sur-corps $F = F_0[\zeta_\ell]$, auquel cas les \mathbb{Z}_ℓ -invariants de F_0 se déduisent de ceux de F par redescente via l'idempotent $e_{F/F_0} = \frac{1}{[F:F_0]} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(F/F_0)} \sigma$. Et ce n'est pas restreindre la généralité que travailler sur F .

Partons donc d'un corps abélien F contenant les racines ℓ -ièmes de l'unité; notons $e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \bar{\tau})$ les idempotents associés à la conjugaison complexe $\bar{\tau} \in G_F = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$; et convenons de dire qu'un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module est réel lorsqu'il est fixé par e_+ , imaginaire lorsqu'il l'est par e_- . Cela étant :

- D'un côté, le théorème de Stickelberger affirme que l'idéal imaginaire \mathcal{S}_F de l'algèbre $\mathbb{Z}[G_F]$ annule la composante imaginaire du ℓ -groupe des classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell_F$ de F ; autrement dit, pour tout m assez grand, sa réduction modulo ℓ^m annule la composante imaginaire de $\mathcal{C}\ell_F$.

2020 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11R23; Secondary 11R37, 11R70.

Key words and phrases: Stickelberger annihilators, logarithmic classes, Bertrandias-Payan module, étale wild kernels.

Received 27 November 2020; revised 14 June 2021.

Published online 18 October 2021.

- D'un autre côté, Gras et Oriat (cf. [8, 24, 11]) ont montré que le reflet modulo ℓ^m de l'idéal \mathcal{S}_F est un idéal réel de l'algèbre quotient $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$ qui annule pour tout m assez grand la composante réelle du sous-groupe de torsion \mathcal{T}_F^∞ du pro- ℓ -groupe des classes infinitésimales de F .

Dans ces deux formulations le ℓ -groupe de classes $\mathcal{C}\ell_F$ d'une part et ℓ -groupe \mathcal{T}_F^∞ d'autre part apparaissent comme en miroir, alors même qu'il n'existe pas de dualité naturelle entre eux : en particulier, ils n'ont généralement ni même ordre, ni même rang.

Le but de la présente note est de présenter une formulation duale originale de ces théorèmes d'annulations, obtenue en remplaçant $\mathcal{C}\ell_F$ par son analogue logarithmique $\tilde{\mathcal{C}}\ell_F$ et \mathcal{T}_F^∞ par ce qu'il est convenu d'appeler le module de Bertrandias–Payan $\mathcal{T}_F^{\text{bp}}$ (cf. e.g. [10, 12, 21]).

Nous énonçons d'abord, pour un corps de nombres arbitraire F , les résultats bien connus sur les groupes $\tilde{\mathcal{C}}\ell_F$ dont nous avons besoin par la suite, ainsi que quelques autres sur les groupes $\mathcal{T}_F^{\text{bp}}$ dans le contexte kummérien, issus essentiellement de [9, 12, 13]. Puis, pour ℓ impair et F abélien contenant μ_ℓ , donc de conducteur f_F multiple de ℓ , nous reprenons la définition standard des éléments de Stickelberger tordus s_F^c , telle qu'énoncée par exemple dans [11], et nous définissons leurs reflets s_F^{c*} dans l'involution du miroir par montée et descente dans la \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique. Procédant ensuite par induction à partir du résultat classique pour la partie imaginaire, puis par dualité de Kummer pour la partie réelle, nous obtenons alors le Théorème Principal suivant :

THÉORÈME PRINCIPAL. *Soient ℓ un nombre premier impair et F un corps abélien contenant le groupe μ_ℓ des racines ℓ -ièmes de l'unité. Notons G_F son groupe de Galois, $F_\infty = \bigcup F_n$ sa \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique, F_n^{bp} le compositum des ℓ -extensions cycliques de F_n localement \mathbb{Z}_ℓ -plongeables, F_n^z le compositum des \mathbb{Z}_ℓ -extensions et F_n^{lc} la plus grande pro- ℓ -extension abélienne de F_n complètement décomposée partout sur F_∞ .*

Notons $F_\infty^{\text{lc}} = \bigcup F_n^{\text{lc}}$, puis $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} = \text{Gal}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty)$ le module de Kuz'min–Tate, $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}^ = \text{Rad}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty)$ son dual de Kummer $\text{Hom}(\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}, \mu_{\ell^\infty})$; écrivons $\Gamma_n = \text{Gal}(F_\infty/F_n)$ et $G_{F_n} = \text{Gal}(F_n/\mathbb{Q})$.*

Définissons le symétrisé ℓ -adique $\hat{\mathcal{S}}\ell_{F_n}$ de l'idéal de Stickelberger comme l'idéal de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_n}]$ engendré par les éléments de Stickelberger tordus $s_{F_n}^c$ et leurs reflets $s_{F_n}^{c}$ pour $c \in \mathbb{Z}_\ell^\times$.*

- (i) *Le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}\ell_{F_n} \simeq \text{Gal}(F_n^{\text{lc}}/F_\infty)$ s'identifie au quotient $\Gamma_n \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}^*$ des co-points fixés par Γ_n .*
- (ii) *Le module de Bertrandias–Payan $\mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}} \simeq \text{Gal}(F_n^{\text{bp}}/F_n^z)$ s'identifie au sous-groupe invariant $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$.*

(iii) L'idéal symétrisé $\hat{\mathcal{S}}\ell_{F_n}$, d'indice fini dans $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_n}]$, annule à la fois $\tilde{\mathcal{C}}\ell_{F_n}$ et $\mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}}$.

NOTA. Il résulte des calculs de Sinnott [26] que l'idéal $\hat{\mathcal{S}}\ell_{F_n}$ est d'indice fini dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_n}]$.

Du fait des relations dans la \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique entre ℓ -groupes de classes logarithmiques et ℓ -noyaux étales supérieurs, qui reposent sur la description, déjà exploitée dans [18], obtenue par Schneider dans [25] en termes de théorie d'Iwasawa, nous en déduisons alors une preuve très simple d'un théorème d'annulation pour ces mêmes noyaux. Le Corollaire 6.3 infra donne ainsi :

COROLLAIRE. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, définissons le $(-i)$ -ième tordu à la Tate $\hat{\mathcal{S}}\ell_{F_n}^{(i)}$ du symétrisé ℓ -adique $\hat{\mathcal{S}}\ell_{F_n}$ de l'idéal de Stickelberger comme étant l'idéal de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_n}]$ engendré par les tordus à la Tate des éléments de Stickelberger $s_{F_n}^c$ et de leurs reflet $s_{F_n}^{c*}$ pour $c \in \mathbb{Z}_\ell^\times$. L'idéal obtenu $\hat{\mathcal{S}}\ell_{F_n}^{(i)}$ annule le i -ième ℓ -noyau étale sauvage $WK_{2i}(F_n)$ attaché au corps F_n .

Rappelons que, suite aux travaux de Soulé, Rost, Voevodsky et Weibel (cf. e.g. [29, 31]), les ℓ -sous-groupes de Sylow des groupes de K -théorie $K_{2i}(\mathcal{O}_F)$ attachés à l'anneau des entiers d'un corps de nombres pour $i > 0$ s'identifient à des groupes de cohomologie étale, ce qui permet de regarder les ℓ -noyaux sauvages de Banaszak [2] comme des noyaux étales supérieurs, suivant la terminologie introduite par Nguyen Quang Do [20], et d'étendre leur définition à tout $i \in \mathbb{Z}$.

Le Corollaire redonne donc le résultat d'annulation établi par Coates et Sinnott [6] pour la composante imaginaire $\mathcal{S}\ell_F$ de $\hat{\mathcal{S}}\ell_F$ et $i > 0$, mais vaut encore pour le symétrisé $\hat{\mathcal{S}}\ell_F$ et même pour tout $i \in \mathbb{Z}$, indépendamment des conjectures de finitude de Schneider.

Précisons ici que c'est volontairement que nous nous sommes restreints dans cette note aux cas des corps absolument abéliens, pour lesquels la définition des annulateurs de Stickelberger est complètement élémentaire. On peut néanmoins imaginer que l'approche logarithmique que nous avons utilisée pourrait aussi bien être développée dans un cadre plus général, dans le contexte de ce qu'il est convenu d'appeler la conjecture équivariante, dans lequel plusieurs résultats profonds viennent d'être récemment obtenus (cf. [7, 19, 23]).

Signalons enfin que, pour les corps abéliens réels, les sous-groupes d'unités circulaires logarithmiques, ainsi que ceux de normes cyclotomiques universelles, fournissent également des annulateurs pour les groupes de classes logarithmiques (cf. [17]), qui sont le pendant logarithmique des résultats de All [1] prouvant et généralisant la conjecture de Solomon [28]. Il sera na-

tuellement instructif d'illustrer numériquement les résultats obtenus pour les classes logarithmiques par ces deux approches, à l'instar de ce qui est fait par Gras [11] dans le cadre classique.

2. Présentation des classes et unités logarithmiques. Soient ℓ un nombre premier donné et F un corps de nombres. À chaque place finie \mathfrak{p} de F , il est attaché dans [13] une application à valeurs dans \mathbb{Z}_ℓ , définie sur le groupe multiplicatif $F_{\mathfrak{p}}^\times$ du complété de F en \mathfrak{p} par la formule $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = \nu_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})$ pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$; et $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = -\frac{1}{\deg \mathfrak{p}} \text{Log}_\ell(N_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(x_{\mathfrak{p}}))$ pour $\mathfrak{p} \mid \ell$, où Log_ℓ désigne le logarithme d'Iwasawa et $\deg \mathfrak{p}$ est un facteur de normalisation calibré pour assurer que l'image de $F_{\mathfrak{p}}^\times$ soit dense dans \mathbb{Z}_ℓ . Cette application induit un morphisme surjectif du *compactifié ℓ -adique* du groupe multiplicatif $F_{\mathfrak{p}}^\times$,

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim F_{\mathfrak{p}}^\times / F_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$$

sur \mathbb{Z}_ℓ dont le noyau, dit *sous-groupe des unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$,

$$\tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}} = \{x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \mid \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0\}$$

s'identifie par la théorie ℓ -adique locale du corps de classes (cf. [14]) au sous-groupe normique de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ associé à la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique $F_{\mathfrak{p}}^c$ de $F_{\mathfrak{p}}$. C'est donc l'analogie du groupe

$$\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}} = \{x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \mid \nu_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0\}$$

des unités de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$, qui correspond, lui, à la \mathbb{Z}_ℓ -extension non-ramifiée de $F_{\mathfrak{p}}$.

Soit maintenant \mathcal{J}_F le *ℓ -adifié du groupe des idèles de F* , i.e. le produit $\mathcal{J}_F = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des compactifiés $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des groupes multiplicatifs des complétés $F_{\mathfrak{p}}$, restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ dont presque tous les éléments tombent dans le sous-groupe unité $\mathcal{U}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}}$. La théorie ℓ -adique globale du corps de classes établit un isomorphisme de groupes topologiques entre le ℓ -groupe des classes d'idèles de F , défini comme le quotient $\mathcal{J}_F/\mathcal{R}_F$ de \mathcal{J}_F par son sous-groupe principal $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$, et le groupe de Galois $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$ de sa pro- ℓ -extension abélienne maximale F^{ab} .

Dans la correspondance ainsi établie (cf. [13, 14]) :

- (i) le groupe de normes associé à la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique $F^c = F_\infty$ de F est le sous-groupe des idèles de degré nul : $\tilde{\mathcal{J}}_F = \{\mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{J}_F \mid \deg(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) \deg \mathfrak{p} = 0\}$;
- (ii) le groupe de normes associé à la plus grande sous-extension F^{lc} de F^{ab} qui est localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur F_∞ en chacune de ses places) est le produit $\tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$ du sous-groupe $\tilde{\mathcal{U}}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des unités logarithmiques locales et de \mathcal{R}_F ;
- (iii) le groupe de Galois $\text{Gal}(F^{\text{lc}}/F_\infty)$ s'identifie ainsi au quotient $\tilde{\mathcal{C}}_{\ell F} = \tilde{\mathcal{J}}_F/\tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$ du groupe $\mathcal{D}_{\ell F} = \tilde{\mathcal{J}}_F/\tilde{\mathcal{U}}_F$ des diviseurs logarithmiques de

degré nul par son sous-groupe principal $\mathcal{P}\ell_F = \mathcal{R}_F \tilde{\mathcal{U}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F$, image canonique de \mathcal{R}_F ;

- (iv) le noyau $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \tilde{\mathcal{U}}_F$ du morphisme $\tilde{\text{div}} : x \mapsto \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x) \mathfrak{p}$ de \mathcal{R}_F dans $\tilde{\mathcal{D}}\ell_F$ est le sous-groupe des normes cyclotomiques (locales comme globales) : $\tilde{\mathcal{E}}_F = \bigcap_n N_{F_n/F}(\mathcal{R}_{F_n})$, où F_n décrit les étages finis de la \mathbb{Z}_{ℓ} -tour cyclotomique F_{∞}/F .

DÉFINITION. On dit que $\tilde{\mathcal{C}}\ell_F \simeq \text{Gal}(F^{\text{lc}}/F_{\infty})$ est le ℓ -groupe des *classes logarithmiques* du corps F et que $\tilde{\mathcal{E}}_F$ est le pro- ℓ -groupe des *unités logarithmiques globales*.

Comme expliqué dans [13, 15], la *conjecture de Gross–Kuz’min* (pour le corps F et le premier ℓ) revient à postuler la finitude de $\tilde{\mathcal{C}}\ell_F$, ou de façon équivalente, que le \mathbb{Z}_{ℓ} -rang de $\tilde{\mathcal{E}}_k$ est la somme $r_F + c_F$ des nombres de places réelles et complexes de F ; ceci est le cas dès lors que F est abélien.

Enfin, du point de vue de la théorie d’Iwasawa, le groupe $\tilde{\mathcal{C}}\ell_F$ s’interprète comme le quotient des genres ${}^I\mathcal{C}'_{F_{\infty}}$, relativement au groupe procyclique $\Gamma = \text{Gal}(F_{\infty}/F)$, du *module de Kuz’min–Tate*

$$\mathcal{C}'_{F_{\infty}} = \varprojlim \mathcal{C}'_{F_n}$$

(noté \mathcal{T}_F dans [15]), limite projective des ℓ -groupes de ℓ -classes d’idéaux attachés aux étages finis F_n de la tour F_{∞}/F . En particulier on a aussi bien $\mathcal{C}'_{F_{\infty}} = \tilde{\mathcal{C}}_{F_{\infty}}$, où

$$\tilde{\mathcal{C}}_{F_{\infty}} = \varprojlim \tilde{\mathcal{C}}\ell_{F_n}$$

est la limite projective des groupes de classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}\ell_{F_n} = \Gamma_n \mathcal{C}'_{F_{\infty}}$ avec $\Gamma_n = \Gamma^{\ell^n} = \text{Gal}(F_{\infty}/F_n)$.

3. Lien avec le module de Bertrandias–Payan. Il est traditionnel depuis [5] d’appeler *pro- ℓ -extension de Bertrandias–Payan* attaché à un corps de nombres F le compositum F^{bp} des ℓ -extensions cycliques L de F qui sont *localement* \mathbb{Z}_{ℓ} -plongeables. En d’autres termes, si F^z désigne, lui, le compositum des \mathbb{Z}_{ℓ} -extensions de F , le corps F^{bp} est la plus grande pro- ℓ -extension abélienne F^{lz} de F qui est complètement décomposée sur F^z en chacune de ses places (cf. [12, 2§b]).

DÉFINITION. Le sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_F^{\text{bp}} = \text{Gal}(F^{\text{bp}}/F^z)$ du groupe abélien $\mathcal{H}_F = \text{Gal}(F^{\text{bp}}/F)$ est un groupe fini, dit *module de Bertrandias–Payan*.

Lorsque le corps de base F contient les racines 2ℓ -ièmes de l’unité, le module $\mathcal{T}_F^{\text{bp}}$ est quasiment en dualité kummérienne avec le groupe des classes logarithmiques $\mathcal{C}\ell_F$. Expliquons cela :

- Pour chaque étage fini F_n de la tour F_∞/F , le groupe de Galois $\mathcal{H}_{F_n} = \text{Gal}(F_n^{\text{bp}}/F_n)$ attaché à F_n est donné par l'isomorphisme

$$\mathcal{H}_{F_n} \simeq \mathcal{J}_{F_n} / \left(\prod_{\mathfrak{p}_n} \mu_{\mathfrak{p}_n} \right) \mathcal{R}_{F_n},$$

où \mathfrak{p}_n parcourt les places finies de F_n et $\mu_{\mathfrak{p}_n}$ désigne le ℓ -groupe des racines de l'unité du complété $F_{\mathfrak{p}_n}$ de F_n en \mathfrak{p}_n (cf. [12, 2§b]).

- Introduisant le pseudo-radical $\mathfrak{R}_{F_n} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} F_n^\times = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_{F_n}$, on voit alors que le module de Bertrandias–Payan $\mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}}$ s'identifie au sous-groupe $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ de \mathfrak{R}_{F_n} défini par

$$\tilde{\mathcal{C}}_{F_n} = \left\{ \ell^{-k} \otimes x_n \in \mathfrak{R}_{F_n} \mid x_n \in \left(\prod_{\mathfrak{p}_n} \mu_{\mathfrak{p}_n} \right) \mathcal{J}_{F_n}^{\ell^k} \right\}.$$

- Par la théorie de Kummer, le corps F_n contenant par hypothèse les racines ℓ^n -ièmes de l'unité, le sous-groupe de ℓ^n -torsion $\ell^n \tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ de $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$, s'interprète comme radical kummérien attaché à la sous-extension d'exposant ℓ^n de F_n^{lc} (cf. [12, Déf. 2.6]).

Plus précisément, ces pseudo-radicaux vérifient la théorie de Galois dans la tour F_∞/F , en ce sens que, posant $\mathfrak{R}_{F_\infty} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} F_\infty^\times = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_{F_\infty}$ puis

$$\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} = \left\{ \ell^{-k} \otimes x_\infty \in \mathfrak{R}_{F_\infty} \mid x_\infty \in \left(\prod_{\mathfrak{p}_\infty} \mu_{\mathfrak{p}_\infty} \right) \mathcal{J}_{F_\infty}^{\ell^k} \right\},$$

on a canoniquement $\mathfrak{R}_{F_n} = \mathfrak{R}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$ et $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n} = \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$ pour $\Gamma_n = \text{Gal}(F_\infty/F_n)$ (cf. [12, Prop. 1.2]).

Maintenant, $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$ est précisément le radical $\text{Rad}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty)$ attaché à la pro- ℓ -extension abélienne maximale de F_∞ qui est complètement décomposée en chacune de ses places. Autrement dit, c'est le dual tordu $\text{Hom}(\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}, \boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty})$ du groupe $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} \simeq \text{Gal}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty)$, où $\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty} = \bigcup_n \boldsymbol{\mu}_{\ell^n}$ est le ℓ -groupe des racines d'ordre ℓ -primaire de l'unité.

En résumé, il vient :

THÉORÈME 3.1. *Soit F un corps de nombres contenant les racines 2ℓ -ièmes de l'unité, $F_\infty = \bigcup_n F_n$ sa \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique et $F_\infty^{\text{lc}} = \bigcup_n F_n^{\text{lc}}$ la pro- ℓ -extension abélienne maximale de F_∞ qui est partout complètement décomposée. Alors :*

- (i) *Le groupe de Galois $\text{Gal}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty)$ s'identifie à la limite projective $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} = \varprojlim \tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ des ℓ -groupes de classes logarithmiques respectivement attachés aux étages finis F_n de la tour.*
- (ii) *Le radical de Kummer $\text{Rad}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty)$ s'identifie à la limite inductive $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} = \varinjlim \tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ des pseudo-radicaux $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n} \simeq \mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}}$, i.e. des modules de Bertrandias–Payan attachés aux F_n .*

(iii) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le ℓ -groupe des classes logarithmiques de F_n s'identifie au quotient de $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$ fixé par $\Gamma_n = \text{Gal}(F_\infty/F_n)$; et le module $\mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}}$ au sous-module de $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$ fixé par Γ_n :

$$\tilde{\mathcal{C}}_{F_n} \simeq \Gamma_n \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}} \simeq \tilde{\mathcal{C}}_{F_n} = \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}^{\Gamma_n}.$$

REMARQUE. Le groupe $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ n'est pas, en général, le radical de Kummer $\text{Rad}(F_n^{\text{lc}}/F_\infty)$ attaché à la pro- ℓ -extension abélienne maximale F_n^{lc} de F_n qui est complètement décomposée partout sur F_∞ .

La descente kummérienne nécessite, en effet, une torsion à la Tate : si $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}$ désigne le module de Tate construit sur les racines ℓ -primaires de l'unité et $\bar{\mathbb{T}}_\ell = \varprojlim \mu_{\ell^n}^*$ le module contragrédient, i.e. le dual de Pontryagin de μ_{ℓ^∞} , on a $\text{Rad}(F_n^{\text{lc}}/F_\infty) \simeq \text{Hom}(\text{Gal}(F_n^{\text{lc}}/F_\infty), \mu_{\ell^\infty})$; puis

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes \text{Rad}(F_n^{\text{lc}}/F_\infty) &\simeq \text{Hom}(\text{Gal}(F_n^{\text{lc}}/F_\infty), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \\ &\simeq \text{Hom}(\Gamma_n \text{Gal}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \\ &\simeq \text{Hom}_{\Gamma_n}(\text{Gal}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \\ &\simeq (\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes \text{Rad}(F_\infty^{\text{lc}}/F_\infty))^{\Gamma_n}, \end{aligned}$$

i.e. $\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \text{Rad}(F_n^{\text{lc}}/F_\infty) = (\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty})^{\Gamma_n}$ (et non $\bar{\mathbb{T}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}^{\Gamma_n}$).

4. Rappels sur les éléments de Stickelberger normalisés. Soient F un corps abélien de conducteur $f_F = f$ et $G_F = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois.

L'élément de Stickelberger normalisé attaché à F est défini dans l'algèbre $\mathbb{Q}[G_F]$ par la formule

$$s_F = - \sum_{0 < a < f}^\times \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{f} \right) \left(\frac{F}{a} \right)^{-1},$$

où la somme porte sur les entiers a étrangers à f , et $\left(\frac{F}{a} \right)$ désigne le symbole d'Artin. En particulier s_F n'est autre que la restriction à F de l'élément $s_f = s_{\mathbb{Q}[\zeta_f]}$ attaché au corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_f]$.

Le symbole d'Artin $\sigma_a = \left(\frac{\mathbb{Q}[\zeta_f]}{a} \right)$ est caractérisé par l'identité $\zeta_f^{\sigma_a} = \zeta_f^a$. Ainsi $\sigma_{-1} = \left(\frac{\mathbb{Q}[\zeta_f]}{-1} \right)$ est la conjugaison complexe, disons $\bar{\tau}$.

- Si donc F est réel, on a $\left(\frac{F}{-1} \right) = 1$, puis $\left(\frac{F}{f-a} \right) = \left(\frac{F}{-a} \right) = \left(\frac{F}{a} \right)$; et finalement $s_F = 0$.
- Si F est imaginaire, le calcul donne $s_F = (1 - \bar{\tau})s'_F$ avec

$$s'_F = \sum_{0 < a < f/2}^\times \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{f} \right) \cdot \left(\frac{F}{a} \right)^{-1}.$$

Il en résulte que l'élément de Stickelberger s_F est *imaginaire*, en ce sens qu'il se factorise par l'idempotent $e_- = \frac{1}{2}(1 - \bar{\tau})$ de l'algèbre $\mathbb{Q}[G_F]$, l'idempotent complémentaire $e_+ = \frac{1}{2}(1 + \bar{\tau})$ correspondant, lui, à la composante *réelle* de l'algèbre de Galois.

Considérons maintenant un sous-corps K de F , autre que \mathbb{Q} , de conducteur f_K et de groupe de Galois G_K . Il est naturel de comparer s_K avec la restriction $N_{F/K}(s_F) = s_F|_K$ de s_F à K . Le résultat est le suivant (cf. e.g. [11, §4.2]) :

$$(4.1) \quad N_{F/K}(s_F) = \prod_{p|f_F, p \nmid f_K} \left(1 - \left(\frac{K}{p}\right)^{-1}\right) s_K$$

où le produit porte sur les premiers p qui divisent f_F mais non f_K ; autrement dit qui se ramifient dans F/\mathbb{Q} mais non dans K/\mathbb{Q} . En particulier, on a toujours

$$N_{F/K}(s_F) = s_K,$$

dès que f_F et f_K ont les mêmes facteurs premiers. En revanche, il vient que

$$N_{F/K}(s_F) = 0,$$

dès qu'il existe un premier p ramifié dans F/\mathbb{Q} qui est complètement décomposé dans K/\mathbb{Q} . C'est en particulier le cas lorsque K est le sous-corps de décomposition d'un premier p divisant f . Ainsi :

PROPOSITION 4.1. *L'élément de Stickelberger s_F annule les $\mathbb{Q}[G_F]$ -modules multiplicatifs engendrés par les idéaux premiers \mathfrak{p}_F de F ramifiés dans F/\mathbb{Q} . En d'autres termes, on a $\mathfrak{p}_F^{s_F} = 1$ pour $\mathfrak{p}_F \mid f$.*

Preuve. On a, en effet, $\mathfrak{p}_K = \mathfrak{p}_F^{e_p(F/K)}$; puis $\mathfrak{p}_F^{e_p(F/K)s_F} = \mathfrak{p}_K^{N_{F/K}(s_F)} = 1$; d'où le résultat.

Maintenant, pour obtenir des éléments entiers il est judicieux de tordre les éléments de Stickelberger par des multiplicateurs convenables, par exemple par les facteurs

$$\delta_F^c = 1 - c \left(\frac{F}{c}\right)^{-1},$$

où c désigne un entier impair et étranger à f . Les éléments de Stickelberger tordus ainsi obtenus,

$$s_F^c = \delta_F^c s_F = \left(1 - c \left(\frac{F}{c}\right)^{-1}\right) s_F,$$

sont alors dans $\mathbb{Z}[G_F]$. Un calcul immédiat donne, en effet,

$$s_F^c = \frac{1}{2}(c-1) \sum_{0 < p < f} \times \left(\frac{F}{a}\right)^{-1} - \frac{1}{f} \sum_{0 < p < f} \times \left(a \left(\frac{F}{a}\right)^{-1} - ac \left(\frac{F}{ac}\right)^{-1}\right),$$

avec à gauche un multiple de la norme $\nu_F = \sum_{\sigma \in G_F} \sigma$ et où la somme à droite est dans $f\mathbb{Z}[G_F]$.

Enfin, comme on a banalement $\delta_F^c|_K = 1 - c\left(\frac{K}{c}\right)^{-1} = \delta_K^c$, ces éléments de Stickelberger tordus satisfont les mêmes identités de restriction que les éléments normalisés plus haut :

$$(4.2) \quad N_{F/K}(s_F^c) = \prod_{p|f_F, p \nmid f_K} \left(1 - \left(\frac{K}{p}\right)^{-1}\right) s_K^c,$$

où p parcourt les nombres premiers ramifiés dans F/\mathbb{Q} mais non dans K/\mathbb{Q} .

5. Dualité du miroir dans la \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique. Supposons maintenant fixé un nombre premier impair ℓ ; partons d'un corps abélien F contenant le groupe μ_ℓ des racines ℓ -ièmes de l'unité (ce qui implique en particulier que ℓ divise le conducteur f de F); introduisons la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique $F_\infty = F\mathbb{Q}_\infty$ de F ; et notons enfin $\Delta = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty) \simeq \text{Gal}(F/(F \cap \mathbb{Q}_\infty))$ le sous-groupe de $G_F = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ qui fixe \mathbb{Q}_∞ .

Écrivons F_n le n -ième étage de la tour F_∞ (c'est un corps abélien imaginaire de conducteur $f_n = f\ell^n$); puis G_n le groupe de Galois de F_n/\mathbb{Q} et $G_{F_\infty} = \varprojlim G_n$ celui de F_∞/\mathbb{Q} . Par projectivité, on voit que le groupe quotient $\text{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$, qui est isomorphe à \mathbb{Z}_ℓ , se relève dans G_{F_∞} , ce qui permet d'écrire G_{F_∞} comme produit direct du sous-groupe fini $\Delta = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ et du relèvement $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell} \simeq \mathbb{Z}_\ell$.

L'algèbre de groupe complète $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$ s'identifie alors à l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma - 1]]$ en l'indéterminée $\gamma - 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$.

REMARQUE. Lorsque ℓ ne divise pas $|\Delta|$, l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est un anneau semi-local, produit fini d'extensions non-ramifiées \mathbb{Z}_φ de \mathbb{Z}_ℓ indexées par les caractères ℓ -adiques irréductibles φ de Δ :

$$\mathbb{Z}_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi, \quad \text{avec} \quad e_\varphi = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\sigma \in \Delta} \varphi(\sigma)\sigma^{-1},$$

Dans ce cas, l'algèbre complète $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$ admet la décomposition directe

$$\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \bigoplus_{\varphi} A_\varphi,$$

où $A_\varphi = \mathbb{Z}_\varphi[[\gamma - 1]]$ est l'algèbre d'Iwasawa attachée à l'extension non-ramifiée \mathbb{Z}_φ de \mathbb{Z}_ℓ . Nous référons à cette situation particulière comme étant le cas semi-simple.

Revenons maintenant au cas général :

DÉFINITION 5.1. Soit $\kappa : G_{F_\infty} \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times$ le caractère ℓ -adique donné par l'action de $G_{F_\infty} = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ sur le groupe μ_{ℓ^∞} des racines de l'unité

d'ordre ℓ -primaire : $\zeta^\sigma = \zeta^{\kappa(\sigma)}$ pour tout $\zeta \in \mathbf{\mu}_{\ell^\infty}$. L'involution du miroir est définie sur l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \mathbb{Z}_\ell[[\Delta]][[\gamma - 1]]$ par l'identité

$$\Phi = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (\gamma - 1)^k \mapsto \Phi^* = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^* (\kappa(\gamma)\gamma^{-1} - 1)^k,$$

où le *reflet* a^* d'un élément $a = \sum_{\sigma \in \Delta} \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est l'élément $a^* = \sum_{\sigma \in \Delta} \alpha_\sigma \kappa(\sigma) \sigma^{-1}$.

L'involution du miroir trouve son origine dans la dualité entre la description kummérienne des pro- ℓ -extensions abéliennes d'un corps surcirculaire F_∞ et leur description galoisienne.

Le miroir envoie un élément ρ de G_{F_∞} sur l'élément $\rho^* = \kappa(\rho)\rho^{-1}$ (et inversement); d'où, par linéarité, la formule annoncée sur $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_\infty}]$ et, finalement, sur $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \mathbb{Z}_\ell[[\Delta]][[\gamma - 1]]$, la congruence $\kappa(\gamma) \equiv 1 \pmod{\ell}$ assurant la convergence de la série.

NOTA. La conjugaison complexe $\bar{\tau}$ opérant par passage à l'inverse sur les éléments de $\mathbf{\mu}_{\ell^\infty}$, on a immédiatement $\kappa(\bar{\tau}) = -1$; donc $e_\pm^* = \frac{1}{2}(1 \pm \bar{\tau})^* = \frac{1}{2}(1 \mp \tau) = e_\mp$: le miroir échange composantes réelles et imaginaires. Plus précisément, dans le cas semi-simple, il envoie l'idempotent e_φ sur l'idempotent $e_{\chi\bar{\varphi}}$, où χ est la restriction de κ à Δ et $\bar{\varphi}$ le contragrédient de φ : $\sigma \mapsto \varphi(\sigma^{-1})$.

6. Démonstration du Théorème Principal. Supposons toujours ℓ premier impair et F abélien contenant $\mathbf{\mu}_\ell$ de conducteur, disons, f_F ; écrivons F_∞ la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique de F et $\Gamma = \gamma_F^{\mathbb{Z}_\ell}$ le groupe procyclique $\text{Gal}(F_\infty/F)$.

Soient $\tilde{\mathcal{C}}\ell_F$ le groupe des classes logarithmiques de F et $\mathcal{T}_F^{\text{bp}}$ le module de Bertrandias–Payan.

PROPOSITION 6.1. *Avec les notations précédentes et pour tout $c \in \mathbb{Z}_\ell^\times$:*

- (i) *Les éléments de Stickelberger $s_F^c = s_{F_\infty}^c \pmod{(\gamma_F - 1)}$ annulent $\tilde{\mathcal{C}}\ell_F$.*
- (ii) *Leurs reflets respectifs $s_F^{c*} = s_{F_\infty}^{c*} \pmod{(\gamma_F - 1)}$ annulent $\mathcal{T}_F^{\text{bp}}$.*

Preuve. Le théorème classique de Stickelberger (cf. e.g. [30, §15.1]), appliqué aux divers étages F_n de la \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique F_∞/F , affirme que, pour tout entier impair c étranger aux conducteurs f_{F_n} , les éléments de Stickelberger tordus $s_{F_n}^c$ annulent respectivement les ℓ -groupes de classes $\mathcal{C}\ell_{F_n}$. Et comme les f_{F_n} ont les mêmes facteurs premiers que f_F , ces éléments vérifient les conditions de cohérence $N_{F_m/F_n}(s_{F_m}^c) = s_{F_n}^c$ pour $m \geq n$, comme indiqué dans la section 4. Ainsi :

- (i) Pour tout c impair étranger à f_F l'élément $s_{F_\infty}^c = \varprojlim s_{F_n}^c$ de l'algèbre complète $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$ annule le groupe $\mathcal{C}F_\infty = \varprojlim \mathcal{C}\ell_{F_n}$, donc, en particulier, son quotient $\mathcal{C}'_{F_\infty} = \varprojlim \mathcal{C}'_{F_n} = \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$.

Il suit de là que la classe s_F^c de $s_{F_\infty}^c$ modulo $(\gamma_F - 1)$ annule le quotient ${}^\Gamma \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} = \tilde{\mathcal{C}}_{\ell_F}$.

(ii) Par ailleurs, puisque $s_{F_\infty}^c$ annule $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$, son reflet $s_{F_\infty}^{c*}$ annule $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} \simeq \text{Hom}(\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}, \mathbf{\mu}_{\ell^\infty})$. Sa classe s_F^{c*} modulo $\gamma_F - 1$ annule donc le sous-module invariant $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}^\Gamma = \tilde{\mathcal{C}}_F \simeq \mathcal{T}_F^{\text{bp}}$.

Faisant alors varier c , nous obtenons le résultat annoncé par un argument immédiat de densité.

REMARQUE. L'involution du miroir est définie dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]$. Ainsi s_F^{c*} désigne ici l'image dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F] = \mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]]/(\gamma_F - 1)$ du reflet $s_{F_\infty}^{c*}$ de l'élément $s_{F_\infty}^c$. Ce n'est pas *stricto sensu* le reflet de l'image s_F^c de $s_{F_\infty}^c$: pour obtenir une involution dans (un quotient de) $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, il convient de raisonner modulo l'ordre ℓ^m de μ_F , i.e. dans $(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})[G_F]$ à l'instar de [11].

Introduisons maintenant le symétrisé $\hat{s}_{F_\infty}^c = s_{F_\infty}^c + s_{F_\infty}^{c*}$ de $s_{F_\infty}^c$. L'élément $s_{F_\infty}^c = \frac{1}{2}(1 - \bar{\tau})\hat{s}_{F_\infty}^c$ est ainsi la partie imaginaire de $\hat{s}_{F_\infty}^c$ et $s_{F_\infty}^{c*} = \frac{1}{2}(1 + \bar{\tau})\hat{s}_{F_\infty}^c$ sa partie réelle. Et il vient :

COROLLAIRE 6.2. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la réduction $\hat{s}_{F_n}^c$ de $\hat{s}_{F_\infty}^c$ modulo $(\gamma_F^{\ell^n} - 1)$ annule le ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}}_{\ell_{F_n}}$ des classes logarithmique de F_n ainsi que le module de Bertrandias–Payan $\mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}}$.*

Preuve. Notons F_n^+ le sous-corps réel de F_n , et $F_\infty^+ = F^{+z}$ son unique \mathbb{Z}_ℓ -extension. De l'inclusion $F_n^{+\text{lc}} \subset F_n^{+\text{bp}}$, on conclut que $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n^+} \simeq \text{Gal}(F_n^{+\text{lc}}/F_\infty^+)$ est un quotient de $\mathcal{T}_{F_n^+}^{\text{bp}} \simeq \text{Gal}(F_n^{+\text{bp}}/F_\infty^+)$ (1).

La composante réelle $\tilde{\mathcal{C}}_{\ell_{F_n}}^+$ de $\tilde{\mathcal{C}}_{\ell_{F_n}}$ étant ainsi un quotient de celle de $\mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}}$, l'élément $s_{F_n}^{c*}$ l'annule. Or, étant réel, il annule banalement la composante imaginaire $\tilde{\mathcal{C}}_{\ell_{F_n}}^-$; donc en fin de compte $\tilde{\mathcal{C}}_{\ell_{F_n}}$ tout entier. En résumé, $\hat{s}_{F_\infty}^c$ annule $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$, donc $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$ par dualité; et $\hat{s}_{F_n}^c$ annule $\mathcal{T}_{F_n}^{\text{bp}}$.

Venons-en enfin aux noyaux étales sauvages $WK_{2i}(F_n)$. Il est bien connu (cf. e.g. [18, 20]) qu'ils sont donnés, comme quotients des genres tordus, par les isomorphismes de modules galoisiens :

$$WK_{2i}(F_n) \simeq {}^{\Gamma_n}(\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}) = (\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}) / (\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty})^{(\gamma_F^{\ell^n} - 1)},$$

(1) Le corps abélien réel F_n^+ admettant F_∞^+ comme unique \mathbb{Z}_ℓ -extension, on pourrait imaginer que $F_n^{+\text{lc}}$ coïncide *toujours* avec $F_n^{+\text{bp}}$. Or, il n'en est rien : d'un côté, en effet, $F_n^{+\text{lc}}$ est la composée des ℓ -extensions cycliques K_n^+ de F_n^+ qui sont localement contenues dans la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique F_∞^+ de F_n^+ , i.e. telles que pour chaque place finie \mathfrak{p}_n de F_n^+ , les complétés de K_n^+ aux places au-dessus de \mathfrak{p}_n sont contenus dans la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique $F_{\mathfrak{p}_n}^{+c}$ du complété $F_{\mathfrak{p}_n}^+$ de F_n^+ en \mathfrak{p}_n ; d'un autre côté, $F_n^{+\text{bp}}$ est la composée des ℓ -extensions cycliques K_n^+ de F_n^+ telles que pour chaque place finie \mathfrak{p}_n de F_n^+ , les complétés de K_n^+ aux places au-dessus de \mathfrak{p}_n sont contenus dans *une* \mathbb{Z}_ℓ -extension de $F_{\mathfrak{p}_n}^+$ (mais pas nécessairement $F_{\mathfrak{p}_n}^{+c}$). Et $F_{\mathfrak{p}_n}^+$ possède bien d'autres \mathbb{Z}_ℓ -extensions que $F_{\mathfrak{p}_n}^{+c}$.

où $\mathbb{T}_\ell^{\otimes i}$ est la $|i|$ -ième puissance tensorielle de \mathbb{T}_ℓ pour $i > 0$, de $\overline{\mathbb{T}}_\ell$ pour $i < 0$, et $\Gamma_n = \gamma^{\ell^n \mathbb{Z}_\ell}$.

Introduisons les tordus à la Tate des symétrisés $\hat{s}_{F_\infty}^c$. Pour chaque élément $\Phi = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (\gamma - 1)^k$ de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[[G_{F_\infty}]] = \mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma - 1]]$ (avec $a = \sum_{\sigma \in \Delta} \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, $\Delta = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_\infty)$ et $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ relevant $\text{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$), définissons le i -ième tordu à la Tate de Φ en posant :

$$\Phi^{(i)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^{(i)} (\kappa(\gamma^i) \gamma - 1)^k, \quad \text{avec} \quad a^{(i)} = \sum_{\sigma \in \Delta} \alpha_\sigma \kappa(\sigma^i) \sigma.$$

Avec ces conventions, il suit directement du corollaire précédent :

COROLLAIRE 6.3. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$, la réduction $\hat{s}_{F_n}^{c(-i)}$ modulo $(\gamma^{\ell^n} - 1)$ du $(-i)$ -ième tordu à la Tate $\hat{s}_{F_\infty}^{c(-i)}$ du symétrisé $\hat{s}_{F_\infty}^c$ annule le i -ième ℓ -noyau étale sauvage $WK_{2i}(F_n)$ attaché au n -ième étage F_n de la tour cyclotomique F_∞/F .*

Références

- [1] T. All, *On p -adic annihilators of real ideal classes*, J. Number Theory 133 (2013), 2324–2338.
- [2] G. Banaszak, *Generalization of the Moore exact sequence and the wild kernel for higher K -groups*, Compos. Math. 86 (1993), 281–305.
- [3] J. Barrett and D. Burns, *Annihilating Selmer modules*, J. Reine Angew. Math. 675 (2013), 191–222.
- [4] K. Belabas and J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, dans : Publ. Math. Besançon Algèbre Théor. Nombres 2016, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2016, 5–18.
- [5] F. Bertrandias et J.-J. Payan, *Γ -extensions et invariants cyclotomiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 (1972), 517–548.
- [6] J. Coates and W. Sinnott, *An analogue of Stickelberger's theorem for the higher K -groups*, Invent. Math. 24 (1974), 149–161.
- [7] S. Dasgupta and M. Kakde, *On the Brumer–Stark conjecture*, prépublication, 2020.
- [8] G. Gras, *Annulation du groupe des ℓ -classes généralisées d'une extension abélienne réelle de degré premier à ℓ* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), no. 1, 15–32.
- [9] G. Gras, *Class Field Theory: From Theory to Practice*, Springer Monogr. Math., Springer, Berlin, 2003.
- [10] G. Gras, *Sur le module de Bertrandias–Payan dans une p -extension–noyau de capitulation*, Publ. Math. Besançon Algèbre Théor. Nombres 2016, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2016, 25–44.
- [11] G. Gras, *Annihilation of $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G}_{K,S}^{\text{ab}})$ for real abelian extensions K/\mathbb{Q}* , Comm. Adv. Math. Sci. 1 (2018), 5–34.
- [12] J.-F. Jaulent, *La théorie de Kummer et le K_2 des corps de nombres*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux 2 (1990), 377–411.
- [13] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux 6 (1994), 301–325.
- [14] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1998), 355–397.

- [15] J.-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross–Kuz'min*, Ann. Math. Québec 41 (2017), 119–140.
- [16] J.-F. Jaulent, *Sur la capitulation pour le module de Bertrandias–Payan*, dans : Publ. Math. Besançon Algèbre Théor. Nombres 2016, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2016, 45–58.
- [17] J.-F. Jaulent, *Annulateurs circulaires et conjecture de Grenberg*, prépublication, 2020.
- [18] J.-F. Jaulent et A. Michel, *Approche logarithmique des noyaux étales sauvages des corps de nombres*, J. Number Theory 120 (2006), 72–91.
- [19] H. Johnston and A. Nickel, *An unconditional proof of the abelian equivariant Iwasawa main conjecture and applications*, prépublication, 2020.
- [20] T. Nguyen Quang Do, *Analogues supérieurs du noyau sauvage*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux 4 (1992), 263–271.
- [21] T. Nguyen Quang Do, *Descente galoisienne et capitulation entre modules de Bertrandias–Payan*, Publ. Math. Besançon Algèbre Théor. Nombres 2016, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2016, 59–79.
- [22] T. Nguyen Quang Do et V. Nicolas, *Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs galoisiens*, Amer. J. Math. 133 (2011), 1533–1571.
- [23] A. Nickel, *Annihilating wild kernels*, Doc. Math. 24 (2019), 2381–2422.
- [24] B. Oriat, *Annulation de groupes de classes réelles*, Nagoya Math. J. 81 (1981), 45–56.
- [25] P. Schneider, *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. 168 (1979), 181–205.
- [26] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*, Invent. Math. 62 (1980), 181–234.
- [27] V. P. Snaith, *Relative K_0 , annihilators, Fitting ideals and Stickelberger phenomena*, Proc. London Math. Soc. 90 (2005), 545–590.
- [28] D. Solomon, *On a construction of p -units in abelian fields*, Invent. Math. 109 (1992), 329–350.
- [29] C. Soulé, *K -théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. 55 (1979), 251–295.
- [30] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd ed., Grad. Texts in Math. 83, Springer, New York, 1997.
- [31] C. Weibel, *The norm residue isomorphism theorem*, J. Topol. 2 (2009), 346–372.

Jean-François Jaulent
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Univ. Bordeaux & CNRS
351 cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex, France
E-mail: Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr